

# DES ACTIVITÉS POUR FAVORISER L'APPRENTISSAGE DE LA LOGIQUE EN CLASSE DE SECONDE

**Céline MURPHY**

Lycée Jules GUESDE, 34000 Montpellier

**Steve WEIMA**

Collège Jules Valles, 94400 Vitry sur Seine

**Viviane DURAND-GUERRIER**

IREM de Montpellier, Université de Montpellier

**Résumé.** Depuis 2009, en France, un enseignement explicite de la logique mathématique a été introduit dans les programmes de Lycée, non pas sous la forme d'un chapitre, mais sous la forme d'activités proposées tout au long de l'année dans les différents chapitres du programme. La question de la mise en œuvre de cette partie du programme soulève de nombreuses questions. Nous proposons dans cet article des activités pour la classe de seconde mises en œuvre en 2013-2014 dans les classes des deux premiers auteurs et analysées pour le mémoire professionnel réalisé dans le cadre du Master MEEF second degré parcours mathématiques de l'ESPÉ<sup>1</sup> Languedoc-Roussillon. Il s'agissait en particulier de questionner les relations entre logique naturelle et logique mathématique dans le cas de l'implication, en considérant les règles de déduction associées et en prenant en compte les questions de quantification.

**Mots clefs.** Logique naturelle versus logique mathématique, implication, réciproque, règles de déduction, quantification implicite, mathématiques en seconde

**Abstract.** Since 2009, In France, Logic as been explicitly introduced in High School as a subject to taught; however, the recommendation are to teach it not as a separate chapter, but all along the year in the different chapters of the program. The way to implement this part of the program raises several questions. In this paper we propose activities that have been experimented in the classes (grade 10) of the first two authors; these activities have been analysed for their professional dissertation in the frame of the teacher training program for prospective secondary teachers in mathematics in the ESPE Languedoc-Roussillon. The focus was on the relationships between natural logic and mathematical logic in the case of implication, considering the deduction rules and taking in account quantification matters

**Keywords.** Natural versus mathematical logic, implication, converse, inference rules, implicit quantification, mathematics in grade 10.

## Introduction

Cet article est issu d'un mémoire professionnel consacré à l'apprentissage de la logique en classe de seconde<sup>2</sup>. La logique, apparue récemment explicitement dans les programmes de lycée dans la rubrique « Notations et raisonnement mathématiques », est un élément plus complexe qu'il n'y paraît. Bien que la logique soit présente en acte dans l'activité mathématique en classe, son explicitation dans les programmes de 2009 met en lumière son importance dans l'enseignement des mathématiques.

Les programmes recommandent que la logique ne fasse pas l'objet de cours spécifiques mais soit étudiée au fil des différents chapitres :

<sup>1</sup> École Supérieure du Professorat et de l'Éducation

<sup>2</sup> Ce mémoire a été réalisé dans le cadre du Master 2 MEEF, parcours mathématiques, de l'université de Montpellier par Céline Murphy et Steve Weima, sous la direction de Viviane Durand-Guerrier.

Les concepts et méthodes relevant de la logique mathématique ne doivent pas faire l'objet de cours spécifiques mais doivent prendre naturellement leur place dans tous les chapitres du programme. (B.O. n°30 du 23 juillet 2009).

En outre, le paragraphe commence par la phrase « pour ce qui concerne le raisonnement logique, les élèves sont entraînés sur des exemples », ce qui accentue le caractère non formalisé de la logique au lycée. En cohérence avec les recommandations des programmes, le document ressource Eduscol consacré à la logique (MEN, 2009) propose une banque d'exemples permettant de travailler la logique dans les différents domaines du programme : fonctions, géométrie et statistique, ainsi que quelques exemples dans des contextes non mathématiques. En accord avec Fabert et Grenier (2011), il nous paraît difficilement réalisable d'aborder simultanément deux notions complexes – une notion de logique et une nouvelle notion mathématique – et de ne pas institutionnaliser certains éléments.

La mise en œuvre de l'apprentissage de la logique en classe ne va pas de soi, notamment parce que depuis de nombreuses années, peu voire aucune formation de logique n'est proposée au cours des études conduisant à l'enseignement des mathématiques. De ce fait, la plupart des enseignants et des auteurs de manuels ne disposent pas d'une théorie de référence pour l'enseignement de la logique ce qui se traduit par un usage ambigu de certains termes et par l'utilisation de définitions peu adaptées, tant dans les manuels que dans les cours des enseignants (Mesnil, 2012).

Pour autant, la logique fait partie intégrante de notre vie : par exemple, les propositions conditionnelles sont connues des élèves dans des contextes hors des mathématiques et des raisonnements déductifs en acte sont présents dans la vie courante et dans la plupart des disciplines scolaires dès le collège, voire l'école primaire<sup>3</sup>. Par conséquent, bien que l'usage des concepts de logique en mathématiques présente des spécificités, nous faisons l'hypothèse qu'il est possible d'introduire la logique mathématique en la mettant en lien avec la logique naturelle et en effectuant les distinctions nécessaires. Pour étudier cette question, nous avons choisi de nous intéresser aux propositions conditionnelles qui jouent un rôle central dans l'activité mathématique.

Nous tenterons dans cet article d'apporter des éléments de réponses aux questions ci-dessous : comment peut-on s'appuyer sur la logique naturelle pour introduire la logique mathématique ? Quelles sont les limites de cette utilisation ? Quelles sont les difficultés liées à la distinction entre ces deux logiques ? Quelles activités pourraient permettre de faire apparaître ces différences ? Nous nous demanderons également si le contexte mathématique a une influence sur la compréhension des propositions conditionnelles et en quoi les quantifications implicites peuvent être sources de difficultés pour les élèves.

Afin d'apporter des éléments de réponse à ces questions, nous commençons par présenter un éclairage théorique en nous appuyant sur des articles de didactique des mathématiques ayant pour objet l'enseignement de la logique, et des ouvrages de logique publiés par certains des auteurs majeurs du renouveau de la logique à la fin du 19<sup>ème</sup> et au début du 20<sup>ème</sup> siècle. Dans une deuxième partie, nous proposons trois problèmes ayant pour objectif l'apprentissage des propositions conditionnelles, que les

3 Vergnaud (1990) souligne que les inférences sont indispensables dans la mise en œuvre des schèmes qui organisent l'action (op. cit. p. 142).

deux premiers auteurs ont mis en œuvre dans leurs classes. Nous présentons notre analyse *a priori*, puis notre analyse *a posteriori* éclairée par quelques productions d'élèves. Nous revenons dans notre conclusion sur nos questions initiales et proposons des prolongements possibles.

## 1. L'implication entre logique naturelle et logique mathématique

### 1.1. Une définition de l'implication logique peu naturelle

Une difficulté bien identifiée dans la littérature (voir par exemple Durand-Guerrier, 1999) concerne l'aspect peu naturel de la définition de l'implication logique par ses conditions de vérité : l'implication est un connecteur logique qui articule deux propositions, produisant un énoncé qui est faux dans le seul cas où l'antécédent est vrai tandis que le conséquent est faux, et vrai dans les trois autres cas possibles (antécédent et conséquent vrais, antécédent faux et conséquent vrai, ou antécédent et conséquent faux)<sup>4</sup>. Si les deux cas où l'antécédent est vrai sont bien en accord avec la logique naturelle, il n'en est pas de même des deux cas où l'antécédent est faux (Durand-Guerrier, 1999, 2003). Néanmoins, comme le fait remarquer Russell (1903), l'étrangeté de l'implication est moins grande si l'on considère non pas l'implication entre propositions (qu'il appelle implication matérielle), mais l'implication formelle de la forme « Pour tout  $x$  dans  $E$ , si  $P(x)$ , alors  $Q(x)$  », qui articule deux propriétés dépendant d'une même variable et est quantifiée universellement sur un domaine d'objets  $E$  donné. Avec ce point de vue, qui est celui de la logique des prédicats du premier ordre (où l'on ne s'autorise pas à quantifier sur les propriétés et les relations), on a les quatre cas de distribution de valeur de vérité, pour lesquels nous précisons s'ils sont associés ou non à une règle de déduction :

Étant donné un énoncé affirmé de la forme « Pour tout  $x$  dans  $E$ , si  $P(x)$ , alors  $Q(x)$  » et un élément  $\alpha$  du domaine d'objets  $E$  :

*1<sup>er</sup> cas* (règle du Modus Ponens) : l'objet  $\alpha$  satisfait la propriété antécédente  $P$  (autrement dit  $P(\alpha)$  est vrai) ; on en déduit que  $\alpha$  satisfait la propriété conséquente  $Q$  (autrement dit  $Q(\alpha)$  est vrai).

*2<sup>ème</sup> cas* (règle du Modus Tollens) : l'objet  $\alpha$  ne satisfait pas la propriété conséquente  $Q$  (autrement dit  $Q(\alpha)$  est faux) ; on en déduit que  $\alpha$  ne satisfait pas la propriété antécédente  $P$  (autrement dit  $P(\alpha)$  est faux).

*3<sup>ème</sup> cas* : l'objet  $\alpha$  ne satisfait pas la propriété antécédente  $P$  (autrement dit  $P(\alpha)$  est faux) ; on ne peut rien en déduire pour  $Q(\alpha)$  (ceci ne nous donne pas d'information sur la valeur de vérité de  $Q(\alpha)$ ).

*4<sup>ème</sup> cas* : l'objet  $\alpha$  satisfait la proposition conséquente  $Q$  (autrement dit  $Q(\alpha)$  est vrai) ; on ne peut rien en déduire pour  $P(\alpha)$  (ceci ne nous donne pas d'information sur la valeur de vérité de  $P(\alpha)$ ).

**Figure 1.** Explication des conditions de vérité permettant de faire des déductions

<sup>4</sup> Cette définition est présentée classiquement par la donnée de la table de vérité de l'implication.

Du point de vue du processus de conceptualisation, Vergnaud (1990) souligne l'importance d'articuler de manière dialectique les invariants opératoires mis en œuvre dans l'action avec les connaissances associées. Pour ce qui concerne le concept logique d'implication, nous faisons l'hypothèse que la capacité à reconnaître les cas où, en présence d'un énoncé conditionnel vrai, on peut faire une déduction et ceux où on ne peut pas est constitutif du sens de l'implication, et ceci pas seulement en mathématiques (Durand-Guerrier, 1999). Ce point met en valeur le fait que travailler sur les règles de déduction permet de faire des ponts entre la logique naturelle et la logique mathématique, la logique formelle du premier ordre fournissant une modélisation que l'on peut appliquer sous certaines conditions à des situations relevant ou non des mathématiques. Ceci nous conduit à prendre en considération des situations intra ou extra mathématiques permettant de développer les invariants opératoires associés aux règles de déduction. Ce choix est cohérent avec l'hypothèse que ceci peut contribuer à l'appropriation par les élèves du concept d'implication mathématique, en les aidant à dépasser les difficultés liées à la définition formelle de l'implication mentionnées ci-dessus. Nous montrerons que la situation *des cosmonautes* proposée dans le document ressource pour la classe de seconde est un bon candidat pour cela et qu'elle permet en outre d'explicitier les choix qui conduisent à la modélisation logique proposée.

## 1.2 Sur l'importance des questions de quantification

Dans ce paragraphe, nous revenons brièvement sur la nécessité de prendre en compte les questions de quantification en classe de mathématiques. Le cœur de l'activité mathématique est le travail avec les objets, les propriétés et les relations (Durand-Guerrier, 2013). De ce fait les notions de variable et de quantification sont centrales. Or, dans les énoncés conditionnels, ceci est le plus souvent caché par la pratique largement répandue d'une quantification implicite, ce qui entraîne des ambiguïtés, en particulier sur le statut logique du terme « un ». Considérons par exemple l'énoncé suivant :

« Si un quadrilatère ABCD a ses diagonales perpendiculaires, alors c'est un losange »

et l'énoncé formalisé associé : « Si  $D(x)$ , alors  $L(x)$  », où  $D$  réfère à la propriété « avoir des diagonales perpendiculaires » et  $L$  réfère à la propriété « être un losange », le domaine d'objet considéré étant l'ensemble des quadrilatères du plan. Une première interprétation consiste à considérer que l'énoncé proposé est universellement quantifié, le domaine de quantification étant l'ensemble des quadrilatères ; dans l'énoncé formalisé associé,  $x$  a le statut de variable liée dans le champ d'un quantificateur universel. Dans ce cas, l'énoncé initial est faux, il admet des contre-exemples. Une deuxième interprétation consiste à considérer que l'énoncé fait référence à un élément générique (n'importe quel quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires). Dans ce cas l'énoncé initial n'a pas de valeur de vérité, il est contingent : vrai pour certains quadrilatères, faux pour d'autres. Une troisième interprétation consiste à considérer qu'il s'agit d'une phrase ouverte ; dans l'énoncé formalisé associé,  $x$  a le statut logique de variable libre, c'est-à-dire de marque-place. Dans ce cas, l'énoncé n'a pas de valeur de vérité. Lorsqu'on affecte un objet à la variable, on obtient une proposition qui peut être vraie (on dit que l'objet satisfait la phrase ouverte), ou fautive (on dit que l'objet ne satisfait pas la phrase ouverte). Cette notion de satisfaction d'une phrase ouverte par un élément est introduite dans Tarski (1936) ; sa pertinence pour l'étude didactique de

L'implication est développée dans Durand-Guerrier (2003). Notons que ces notions de phrase ouverte et de satisfaction associée sont implicitement mobilisées dans la mise en œuvre des règles de déduction à partir d'un énoncé universellement quantifié (voir figure 1). Le point de vue habituel est que, dans la classe de mathématiques, les énoncés conditionnels sont implicitement quantifiés, ce qui revient à ne considérer que la première interprétation. Néanmoins, de nombreux élèves ne partagent pas cet implicite ; ceci peut être mis en évidence à l'aide de la tâche du labyrinthe (Durand-Guerrier 1999) qui montre de manière récurrente un désaccord entre élèves et professeurs sur ce point. Il faut noter en outre que la pratique de quantification implicite des énoncés conditionnels tend à occulter l'importance du domaine de quantification pour statuer sur la valeur de vérité des énoncés. Dans l'exemple précédent, la propriété « avoir ses diagonales perpendiculaires » est une propriété caractéristique des losanges parmi les parallélogrammes. Cette connaissance mathématique est étroitement liée à la mise en œuvre des compétences logiques en situation de déduction. Nous considérons donc, en accord avec le document ressource, qu'un travail spécifique sur les questions de quantification doit être conduit avec les élèves en lien avec les connaissances mathématiques en jeu.

## 2. Des activités pour la classe de seconde

Au cours de l'année 2013-2014, les deux premiers auteurs de l'article ont mis en place une expérimentation en classe de seconde basée sur cinq problèmes avec un double objectif : travailler avec les élèves différents aspects de l'implication d'une part, mettre à l'épreuve les hypothèses et apporter des éléments de réponse aux questions étudiées dans le mémoire professionnel d'autre part. Parmi les trois problèmes retenus pour cet article, le premier (*Les cosmonautes*) est un problème classique relevant d'un contexte non mathématique, le second (*Les losanges*) est posé dans le cadre géométrique ; le troisième (*Implications mathématiques*) fait intervenir plusieurs cadres mathématiques.

Pour chaque problème, nous justifions notre choix et proposons une analyse *a priori* en mettant en lumière les différents enjeux et les éventuelles procédures des élèves.

### 2.1 Le problème « Les cosmonautes »

Ce problème est extrait du document ressource Eduscol dans la partie intitulée Implication mathématique (MEN, 2009, p.8). Une expérimentation réalisée par l'IREM de Grenoble est présentée dans Legrand (1983, p.60).

<b>Les cosmonautes</b>
<p>Une réunion de cosmonautes du monde entier a lieu à Paris. Les cosmonautes américains portent tous une chemise rouge.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. À l'aéroport on voit quelqu'un qui porte une chemise blanche. Est-il cosmonaute américain ?</li> <li>2. À côté de la personne précédente, on voit quelqu'un qui porte une chemise rouge. Est-il cosmonaute américain ?</li> <li>3. Le haut-parleur annonce l'arrivée d'un cosmonaute russe. Porte-t-il une chemise rouge ?</li> <li>4. Dans le hall, on voit un cosmonaute américain qui porte un manteau. Porte-t-il une chemise rouge ?</li> </ol>

*Figure 2. L'énoncé du problème des cosmonautes*

Les élèves sont invités à répondre OUI, NON ou On ne peut pas savoir (NPPS). Posé dans un contexte non mathématique évoquant une situation de la vie courante, ce problème met en jeu les règles de déduction (ou règles d'inférence) associées à un énoncé conditionnel affirmé : un faisceau d'informations permettant d'en déduire une conclusion, c'est-à-dire une utilisation du Modus Ponens ou du Modus Tollens mais aussi les deux cas où l'on ne peut pas conclure. C'est donc ici l'aspect opératoire de l'implication qui est mis en avant. Néanmoins, ce problème peut permettre également de travailler l'implication, sa réciproque, sa contraposée et les valeurs de vérités associées.

*Modélisation logique standard de la situation*

Comme suggéré dans le document du MEN (2009), l'énoncé qui permet le raisonnement peut être reformulé, au moins en acte, sous la forme habituelle utilisée au collège : « Soit une personne dans l'aéroport. S'il est cosmonaute américain, alors il porte une chemise rouge ». Cette structure met en relief les deux propriétés « être cosmonaute américain » (que nous noterons  $P(x)$ ) et « porter une chemise rouge » (que nous noterons  $Q(x)$ ) liées par l'implication suivante : Pour tout  $x \in A$ ,  $(P(x) \Rightarrow Q(x))$ , où le domaine d'objets  $A$  considéré est l'ensemble des personnes présentes dans l'aéroport. Pour chacune des questions, on considère une personne présente dans l'aéroport évoqué dans l'énoncé, personne que nous notons  $\alpha$  pour laquelle, en cohérence avec les données du problème, l'énoncé «  $P(\alpha) \Rightarrow Q(\alpha)$  » est vrai.

Le tableau ci-dessous résume les réponses correctes attendues si l'on considère que la réciproque de l'énoncé conditionnel est un énoncé faux (interprétation standard).

	Réponse	Explication théorique
1	NON	en vertu du Modus Tollens : $P(\alpha) \Rightarrow Q(\alpha)$ , or non $Q(\alpha)$ donc non $P(\alpha)$ ;
2	NPPS	$P(\alpha) \Rightarrow Q(\alpha)$ et $Q(\alpha)$ ne permettent pas de conclure sur la valeur de vérité de $P(\alpha)$ ;
3	NPPS	$P(\alpha) \Rightarrow Q(\alpha)$ et non $P(\alpha)$ ne permettent pas de conclure sur la valeur de vérité de $Q(\alpha)$ ;
4	OUI	en vertu du Modus Ponens : $P(\alpha) \Rightarrow Q(\alpha)$ , or $P(\alpha)$ donc $Q(\alpha)$ .

**Figure 3.** Réponses correctes attendues avec l'interprétation standard

Dans cette interprétation standard, on retrouve les deux règles d'inférences classiques (Modus Ponens et Modus Tollens) et les deux cas où on ne peut pas faire d'inférence. Cette situation conduit à prendre en considération en acte les cas où l'antécédent de l'implication affirmée est faux, dans une situation relevant de la logique naturelle. Nous faisons l'hypothèse que ceci permet de légitimer la définition de l'implication qui sera donnée plus tard.

*Modélisations alternatives prenant en compte des éléments de contexte*

Compte tenu du contexte choisi pour le problème, d'autres interprétations sont susceptibles d'apparaître, l'énoncé comportant certaines ambiguïtés. En effet, faut-il supposer que la population de l'aéroport n'est pas uniquement composée de cosmonautes ? D'autre part, étant donné que les cosmonautes américains ont une

couleur de chemise prédéfinie, il est cohérent de penser que chaque pays assistant à la réunion ait une couleur de chemise attitrée. Cette interprétation peut être considérée comme une application du principe du maximum d'information (Legrand, 1983, p. 64)<sup>5</sup>. L'interprétation du contexte évoqué joue un rôle essentiel dans le choix du domaine de quantification de l'implication par les élèves. Supposons que l'on considère ici que chaque pays a une couleur de chemise. L'énoncé se décline alors en deux versions :

1<sup>er</sup> cas : Il n'y a personne d'autre que les cosmonautes invités à la réunion dans l'aéroport. Dans ce cas, « être américain » est équivalent à « porter une chemise rouge ».

2<sup>ème</sup> cas : Il y a dans l'aéroport les cosmonautes qui participent à la réunion et d'autres personnes. Dans ce cas, « être un cosmonaute américain » implique de « porter une chemise rouge », mais « porter une chemise rouge » n'implique pas « être un cosmonaute américain », car il se pourrait que la personne considérée ne soit pas cosmonaute (il y a *a priori* des contre exemples possibles à l'énoncé réciproque).

On obtient avec cette interprétation deux autres types de réponses : à gauche en considérant que l'aéroport n'accueille que des cosmonautes (l'implication proposée est interprétée comme une équivalence) et à droite en considérant que l'aéroport accueille des personnes non cosmonautes.

Question	Réponse	Question	Réponse
1	NON	1	NON
2	OUI	2	NPPS
3	NON	3	NON
4	OUI	4	OUI

*Figure 4. Autres réponses possibles en prenant en compte le contexte*

Trois types de réponses sont donc attendus en fonction de l'interprétation qui est faite de l'énoncé de départ. Nous faisons l'hypothèse que ces modélisations alternatives peuvent apparaître chez certains élèves, d'autres choisissant l'interprétation standard. Il est alors possible d'organiser un débat permettant de discuter les points suivants : 1/ le domaine de quantification est un élément crucial pour faire la distinction entre implication vraie dont la réciproque est fausse et équivalence vraie. 2/ Pour proposer une modélisation logique d'une situation non mathématique, il est nécessaire de faire des choix, certains de ces choix pouvant modifier les inférences permises associées à un énoncé affirmé.

## 2.2 Le problème « À propos de losanges »

Ce problème permet le passage à la logique mathématique dans un cadre mathématique. L'objectif est de travailler les notions de conditions nécessaires et de conditions suffisantes et de différencier les énoncés universellement quantifiés de ceux qui ne le sont pas, en prenant en compte le domaine de quantification. Dans un cadre géométrique, le problème s'appuie sur l'ensemble des quadrilatères, un objet connu des

<sup>5</sup> On peut le traduire sous la forme : *si des cosmonautes d'autres pays pouvaient porter une chemise rouge, ceci aurait été dit dans l'énoncé.*

élèves, dont on peut faire l'hypothèse qu'il est suffisamment familier à ce niveau d'étude pour permettre un travail centré sur les notions logiques en jeu. Il faut noter cependant que la prégnance des quadrilatères particuliers reste présente y compris chez des élèves de fin de lycée ; on peut donc s'attendre à des réponses incorrectes liées à la non disponibilité d'exemples de quadrilatères autres que ceux étudiés et identifiés au collège (Durand-Guerrier, 1999).

#### A propos de losanges

Jérôme a dessiné un quadrilatère ayant ses diagonales perpendiculaires. Est-ce un losange ?  
Sarah a dessiné un parallélogramme ayant ses diagonales perpendiculaires. Est-ce un losange ?

*Figure 5. L'énoncé des deux questions sur les losanges*

Il est important que les deux questions de l'énoncé soient proposées séparément pour ne pas influencer la réponse donnée à la première question.

Pour la première question, on se place dans l'ensemble des quadrilatères, la propriété « avoir ses diagonales perpendiculaires » est une condition nécessaire pour être un losange mais elle n'est pas suffisante. Par conséquent la proposition « Tout quadrilatère ayant ses diagonales perpendiculaires est un losange » est fausse. Le cerf-volant est un contre-exemple classique que les élèves ont pu rencontrer. Cependant, ici, l'énoncé concerne un quadrilatère singulier, celui dessiné par Jérôme. Puisqu'on est dans un cas particulier et que l'énoncé universel associé est faux, la réponse attendue est *on ne peut pas savoir* : il existe des instances de l'énoncé qui sont vraies, et d'autres qui sont fausses. Ceci est lié au fait que la négation de « tous vérifient la propriété » est « au moins un ne la vérifie pas » et non pas « aucun ne la vérifie ». D'après ce qui précède, les réponses « on ne peut pas savoir » ou « non/faux » sont possibles mais la réponse « oui » peut aussi apparaître en cas de connaissances incomplètes sur les losanges. Cette hypothèse s'appuie sur les résultats d'une enquête conduite en 1992 auprès de 273 étudiants arrivant en 1<sup>ère</sup> année d'université. A la question « Un quadrilatère (A,B,C,D) a ses diagonales perpendiculaires. Est-ce un losange ? », environ 31 % des réponses sont du type on ne peut pas savoir, environ 40% des étudiants répondent que la phrase est fausse et 22% environ qu'elle est vraie ; les autres réponses sont difficiles à interpréter (Durand-Guerrier, 1999, p.74).

Concernant la deuxième question, on se place dans l'ensemble des parallélogrammes : la propriété « avoir ses diagonales perpendiculaires » est cette fois-ci une condition nécessaire et suffisante pour être un losange. Par conséquent la proposition « Tout parallélogramme ayant ses diagonales perpendiculaires est un losange » est vraie. Par suite, la réponse attendue est *oui* (application de la règle « *ce qui vaut pour tous, vaut pour chacun* »). Une erreur éventuelle peut être de justifier la réponse à l'aide de multiples exemples plutôt que par un raisonnement mathématique.

### 2.3 Le problème « Implications mathématiques »

L'objectif de ce problème est de travailler l'implication dans un cadre mathématique avec différents thèmes : géométrique, algébrique ou analytique. Il ne s'agit plus ici de travailler sur ce que l'on peut déduire d'un énoncé dont on connaît la valeur de vérité.



L'activité consiste à évaluer la valeur de vérité de quatre énoncés choisis dans des domaines mathématiques différents ; les objets mathématiques en jeu sont *a priori* suffisamment familiers pour que l'on puisse se concentrer sur les aspects logiques.

<b>Implications mathématiques</b>
<p>Pour chaque implication :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– donner sa valeur de vérité</li> <li>– énoncer sa réciproque</li> <li>– donner la valeur de vérité de la réciproque</li> </ul>
1) Si les droites $d$ et $d'$ sont sécantes alors les droites $d$ et $d'$ sont perpendiculaires.
2) Si le quadrilatère ABCD est un parallélogramme avec un angle droit alors c'est un rectangle.
3) Si $f$ est strictement décroissante sur $[0;4]$ alors $f(0) > f(4)$ .
4) Si $a = b$ alors $a^2 = b^2$ .

**Figure 6.** L'énoncé des quatre questions sur les implications mathématiques

Cet exercice traitant de la vérité de l'implication permet de faire prendre conscience aux élèves qu'une implication peut être *a priori* vraie ou fausse alors que par définition, un théorème (*le plus souvent au collège et en seconde une implication universellement quantifiée*) est un énoncé dont on a établi qu'il est vrai dans la théorie considérée (*théorie qui reste le plus souvent implicite à ce niveau d'étude*). Un autre aspect que nous souhaitons travailler avec ce problème concerne l'influence du domaine mathématique sur la compréhension des propositions conditionnelles et l'impact sur les élèves de la quantification implicite. L'étude de la réciproque permet en l'énonçant de la distinguer de l'implication directe et l'étude de sa valeur de vérité montre que leurs valeurs de vérité peuvent être différentes. C'est aussi l'occasion de réinvestir la notion de contre-exemple.

Ce problème ne cible pas le cas de la prémisse fausse. Cette question est plus délicate et devrait faire l'objet d'un autre travail lorsque les aspects travaillés dans les problèmes proposés précédents seront mieux maîtrisés, par exemple en classe de première.

Pour introduire notre analyse *a priori*, nous ferons quelques remarques générales sur l'ensemble du problème puis nous analyserons chacune des questions indépendamment. Ces questions peuvent être traitées d'un bloc ou de façon indépendante. Nous faisons l'hypothèse que pour étudier la valeur de vérité de l'implication, les élèves supposeront que la prémisse est vraie et observeront la valeur de vérité de la conclusion. Si la conclusion est vraie, alors l'implication est vraie. Si la conclusion est fausse, alors l'implication est jugée comme fausse. Lorsque la conclusion est vraie dans certains cas et fausse dans d'autres cas, l'implication peut-être considérée comme n'ayant pas de valeur vérité (réponse de la forme « on ne peut pas savoir »). Ce dernier type de réponse est lié au problème de la quantification implicite des propositions conditionnelles.

Le contre-exemple permet de démontrer qu'une implication est fausse ; cette règle est fréquemment mobilisée par les élèves. Cependant, il est vraisemblable que certains élèves s'appuieront sur des exemples pour montrer qu'une implication est vraie.

Nous récapitulons ci-dessous les réponses attendues, en considérant que les énoncés sont universellement quantifiés.

Question	Valeur de vérité de l'implication	Réciproque	Valeur de vérité de la réciproque
1	FAUX	Si les droites $d$ et $d'$ sont perpendiculaires alors $d$ et $d'$ sont sécantes	VRAI
2	VRAI	Si le quadrilatère ABCD est un rectangle alors c'est un parallélogramme avec un angle droit	VRAI
3	VRAI	Si $f(0) > f(4)$ alors $f$ est strictement décroissante sur $[0;4]$	FAUX
4	VRAI	Si $a^2 = b^2$ alors $a = b$	FAUX

*Figure 7. Les réponses attendues aux questions sur les implications mathématiques*

Détaillons maintenant les particularités et difficultés relatives à chaque question.

#### Question 1

Le choix des objets familiers devrait permettre de clairement identifier les élèves confondant implication et réciproque. De plus, la réciproque est facile à énoncer puisque les deux propositions sont symétriques, au sens où il suffit d'échanger la place des deux relations en jeu dans l'implication initiale pour obtenir la réciproque.

Pour montrer que l'implication est fautive, les élèves peuvent proposer un contre-exemple sous forme de dessin. Il est peu probable par contre qu'un élève propose un contre-exemple avec une formulation du type : « les droites portées par les côtés d'un triangle équilatéral sont sécantes mais ne sont pas perpendiculaires ».

#### Question 2

Le cadre géométrique des quadrilatères particuliers, normalement bien connu des élèves, est pourtant mal maîtrisé. En effet, comme dans le deuxième problème « à propos des losanges », on peut faire l'hypothèse que les élèves ne distinguent pas les conditions nécessaires, des conditions suffisantes et des conditions nécessaires et suffisantes<sup>6</sup>. Cela peut influencer leur réponse à cette question.

La quantification implicite (pour tout quadrilatère ABCD) joue un rôle primordial. Le choix de nommer le quadrilatère amène une difficulté supplémentaire dans la reconnaissance de la quantification. Certains élèves peuvent penser que le quadrilatère est désigné. Ce problème de quantification ne devrait pas avoir d'impact sur la détermination des valeurs de vérité ; en effet, l'énoncé direct et sa réciproque universellement quantifiés étant vrais, toutes les instances sont vraies.

Par contre, du fait que les deux propositions articulées par le conditionnel ne sont pas symétriques, on peut s'attendre à ce que les élèves rencontrent des difficultés pour formuler la réciproque. En effet, la règle syntaxique qui consiste à échanger les rôles des deux propositions conduit à l'énoncé « si c'est un rectangle, alors le quadrilatère ABCD

<sup>6</sup> Deloustal-Jorrand (2004) montre que cette distinction reste difficile dans les situations inhabituelles pour des étudiants titulaires d'une licence de mathématiques.

est un parallélogramme avec un angle droit », qui est inadéquat au sens où l'on ne sait pas à quoi renvoie « c' » dans « c'est un rectangle ». Il est nécessaire de reformuler l'énoncé direct soit en faisant apparaître la quantification « Pour tout quadrilatère ABCD », soit en répétant l'expression « le quadrilatère ABCD », ou encore en faisant disparaître « ABCD » avant d'énoncer la réciproque.

En outre, les deux emplois de l'article indéfini « un » dans les expressions « un parallélogramme » et « avec un angle droit » renvoient à des significations différentes. En effet, le mot « un » a plusieurs significations dans le langage courant comme en mathématiques : exactement un, au moins un, tout, un parmi d'autres, un élément générique (c'est-à-dire n'importe quel élément d'un ensemble donné). Le premier « un » peut être interprété « un parmi d'autres » alors que le second signifie « au moins un ». Ceci pourrait induire des difficultés dans l'interprétation de l'énoncé.

Pour conclure, cette question présente une équivalence vraie comme la conjonction d'une implication vraie et d'une réciproque vraie.

### Question 3

Cette question permet de réinvestir les définitions relatives au sens de variation des fonctions dont la compréhension est un objectif du programme de la classe de seconde. La définition de la stricte décroissance étant un énoncé universellement quantifié, les élèves doivent appliquer en acte une règle de déduction du calcul des prédicats : *ce qui est vrai pour tous vaut pour chacun*. Ceci entraîne de façon immédiate la vérité de l'implication directe. Bien que la définition de la stricte décroissance – Pour tout  $(x, y)$  dans  $[0 ; 4] \times [0 ; 4]$ , tels que  $x < y$ , on a  $f(x) > f(y)$  – soit connue, les élèves doivent appréhender le fait que si l'énoncé général est vrai, alors l'énoncé singulier appliqué au cas particulier  $(0 ; 4)$  est vrai, et que par contre du cas particulier on ne peut pas déduire la vérité du cas général. Par conséquent, le sens de la quantification universelle présente dans la définition de la décroissance est travaillé lors de l'étude de la réciproque. Il faut noter que si le domaine de quantification est celui des fonctions affines, alors l'implication proposée est en fait une équivalence. Il est de ce fait possible que certains élèves se placent dans ce cadre et considèrent que la réciproque est vraie.

En outre, nous faisons l'hypothèse que les élèves cherchant à montrer que la réciproque est fautive rencontrent des difficultés pour proposer un contre-exemple à l'aide d'une fonction donnée par son expression algébrique. En effet, les élèves de seconde disposent seulement d'un petit panel de fonctions de référence (fonctions affines, fonction carré, fonction inverse). Les contre-exemples graphiques sont *a priori* plus facilement accessibles. Cependant, il faut prendre en compte le fait que la notion de représentation graphique d'une fonction a été introduite récemment, si bien que l'on peut s'attendre à ce que cette possibilité soit peu mobilisée par les élèves.

### Question 4

L'implication proposée dans cette question s'appuie une connaissance solide des élèves (élever un nombre au carré) ; néanmoins le fait que deux lettres distinctes puissent désigner le même élément peut introduire une difficulté pour les élèves.

La fonction « élever au carré » n'étant pas bijective sur  $\mathbb{R}$ , la réciproque est fautive. Cependant, habitués à l'utilisation de la fonction « racine carrée » lors de problèmes géométriques, on s'attend à ce que de nombreux élèves ne considèrent que des nombres positifs, omettant de ce fait de prendre en compte la racine négative. Nous pouvons

donc penser que certains élèves se placeront dans  $\mathbb{R}^+$ , un ensemble dans lequel la réciproque de l'énoncé initial est vraie. La quantification implicite a encore ici un rôle important car selon le domaine de quantification considéré, les conclusions ne seront pas les mêmes.

Pour conclure, l'ensemble des problèmes propose un fil conducteur sur la découverte de l'implication. Le premier problème permet de travailler dans un cadre non mathématique sur les deux règles d'inférences associées à une implication en traitant les cas où aucune inférence n'est possible, ce qui permet de travailler sur l'aspect opératoire de l'implication conforme à l'usage mathématique ; le second problème est posé dans un cadre mathématique familier pour les élèves de seconde et met en jeu les notions de conditions nécessaire et suffisante. Ces deux problèmes permettent en outre de mettre en lumière l'importance du domaine de quantification. Le troisième problème permet un travail sur l'implication comme objet dans différents domaines mathématiques, en mettant en avant une propriété logique cruciale : la réciproque d'une implication vraie n'est pas nécessairement une implication vraie. Tous liés à l'implication, chacun de ces problèmes permettent donc de travailler celle-ci sous un angle différent.

### 3. Quelques résultats expérimentaux

Ces trois problèmes ont été proposés aux élèves des classes de seconde de Céline Murphy et Steve Weima dans le cours ordinaire de la classe. Les traces de l'activité des élèves ont été recueillies et analysées pour les besoins du mémoire professionnel. Nous rendons compte ici de la mise en œuvre de ces problèmes dans deux classes de seconde et nous donnons les principaux résultats obtenus éclairés par des productions d'élèves.

#### 3.1 Le problème « Les cosmonautes »

Le problème des cosmonautes a été distribué en version papier à 55 élèves et a été traité de façon individuelle en classe. La réponse attendue a été proposée par 32 élèves<sup>7</sup>. Nous analysons ci-dessous l'ensemble des réponses proposées.

##### *Un phénomène inattendu dû au contexte*

Dans l'analyse *a priori* de cette activité, nous avons envisagé les phénomènes liés au contexte, néanmoins nous avons été surpris par un phénomène non prévu. Certains élèves ont interprété que les cosmonautes américains portaient une chemise rouge à la réunion, par conséquent il était impossible de déterminer leur tenue à l'aéroport. Il faut noter que cette interprétation ne permettant de statuer sur la valeur de vérité d'aucune des questions, ces élèves ont répondu « on ne peut pas savoir » à chacune des quatre réponses. Ceci concerne 5 élèves, sur les 55 ayant répondu.

---

<sup>7</sup> Pour plus de détails voir annexe 1.

1. À l'aéroport on voit quelqu'un qui porte une chemise blanche.

Est-il cosmonaute américain? N P S

Les cosmonautes américains portent une chemise rouge à la réunion  
alors que la question porte sur l'aéroport, on ne peut donc pas savoir  
Peut être est-ce un américain qui ne porte pas sa chemise rouge pour  
la garder au propre ou peut être ce n'est même pas un américain

**Figure 8.** Extrait de copie d'élève n°1 – Un phénomène inattendu

#### Application en acte du Modus Ponens et du Modus Tollens

Concernant la réponse à la première question, hormis les cinq personnes ayant répondu *on ne peut pas savoir* en s'appuyant sur le contexte, les autres élèves ont répondu *non*. Une première justification s'apparente à la mise en œuvre de la règle d'inférence du Modus Tollens, disponible en acte pour les élèves bien que non institutionnalisée :

1. À l'aéroport on voit quelqu'un qui porte une chemise blanche.

Est-il cosmonaute américain?

Non car les cosmonautes américains portent tous une  
chemise rouge et cette personne porte une chemise blanche.

**Figure 9.** Extrait de copie d'élève n°2 – Application en acte du Modus Tollens

Pour la question 4, tous les élèves affirment que la personne porte bien une chemise rouge. Beaucoup ne justifient pas ou peu, car cela relève d'une évidence pour eux. D'autres explicitent un raisonnement qui s'apparente à l'application de la règle d'inférence du Modus Ponens, institutionnalisée au collège, comme ci-dessous :

4. Dans le hall, on voit un cosmonaute américain qui porte un manteau.

Porte-t-il une chemise rouge ? 0

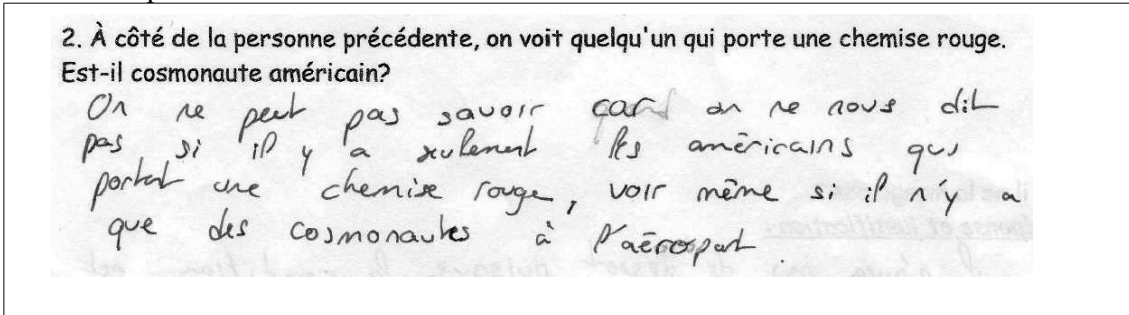
Si il est cosmonaute américain il que tout les cosmonaute  
américain porte des chemise rouge alors oui il en porte  
une aussi

**Figure 10.** Extrait de copie d'élève n°3 – Application en acte du Modus Ponens

Notons que dans cette production, l'élève n'utilise pas la forme standard du Modus Ponens nécessitant le marqueur de déduction « donc ». Son énoncé est une instance de la loi logique associée. Néanmoins, nous considérons que ceci traduit une mise en œuvre en acte de cette règle de déduction.

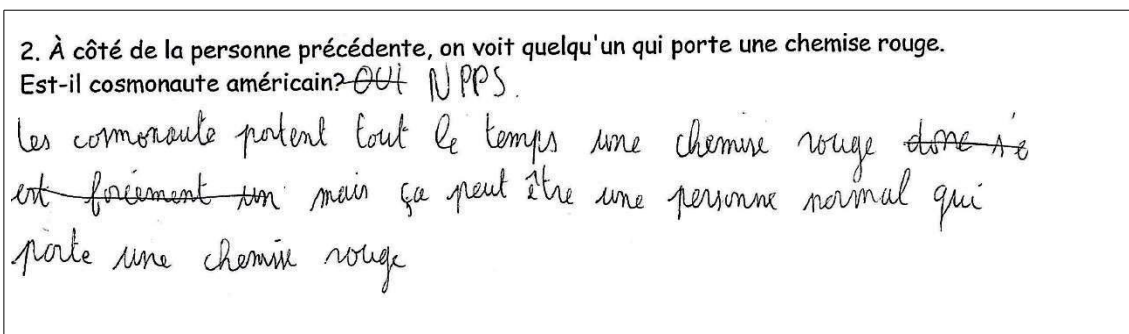
*Cas où l'on ne peut pas conclure*

Concernant les questions 2 et 3, parmi les réponses proposées, on peut constater que le contexte a conduit à plusieurs interprétations possibles de la situation. Les 36 élèves qui donnent la réponse attendue (*on ne peut pas savoir* pour les deux questions) justifient leur réponse par le fait que la valeur de vérité de la réciproque n'est pas connue, comme l'illustre la production ci-dessous :



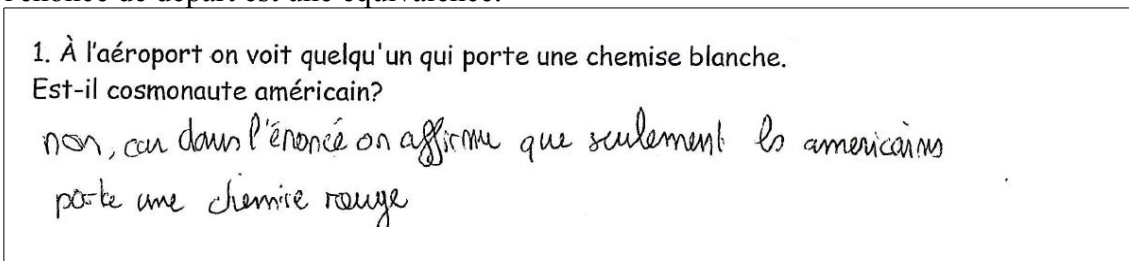
**Figure 11.** Extrait de copie d'élève n°4 – Incertitude sur l'interprétation du contexte

Notons que dans cette réponse l'élève soulève en outre la question du domaine de quantification. Le couplage *on ne peut pas savoir* à la question 2 et *non* à la question 3, mentionné dans l'analyse *a priori*, est apparu cinq fois.



**Figure 12.** Extrait de copie d'élève n°5 – Importance du domaine de quantification

Le domaine de quantification sur lequel l'implication est vraie joue ici un rôle crucial. Selon que l'on considère que toutes les personnes présentes sont des cosmonautes ou non, la nature du lien implicatif entre « être américain » et « porter une chemise rouge » est modifiée. D'autre part, s'ajoutant à l'effet du contexte, certains élèves supposent que l'énoncé de départ est une équivalence.



**Figure 13.** Extrait de copie d'élèves n° 6 – Interprétation « équivalence »

L'implication, reformulée avec le terme « seulement » est appliquée à une population composée uniquement de cosmonautes. Cette interprétation peut être mise en relation avec le principe du maximum d'information (Legrand, 1983).

Pour conclure, cette analyse confirme les effets liés au contexte sur l'interprétation et par suite sur les raisonnements. Le contrat didactique ne spécifie pas si le choix de prendre en compte les éléments non mathématiques est de la responsabilité de l'élève. En effet, il semble peu naturel d'imaginer une situation où les cosmonautes américains ne quitteraient leurs chemises rouges en aucune circonstance. Hors ces problèmes de contexte, les élèves ont remarqué majoritairement qu'il s'agissait d'une implication vraie dont la valeur de vérité de la réciproque n'est pas connue. Dans la plupart des cas, le Modus Ponens et le Modus Tollens ont été correctement appliqués en acte. Dans la classe de C. Murphy, dans la phase d'institutionnalisation, l'implication a été réécrite sous la forme « Soit un cosmonaute. S'il est américain, alors il porte une chemise rouge ». Cette implication est vraie (c'est une donnée du problème), par suite lorsque l'antécédent est vrai, on peut en déduire que le conséquent est vrai, ce qui permet de répondre à la question 4. Lorsque le conséquent est faux, on peut en déduire que l'antécédent est faux, ce qui permet de répondre à la question 1. L'énoncé réciproque est écrit par les élèves et l'ensemble des élèves convient que « mathématiquement » (hors contexte) rien n'est dit sur la valeur de vérité de celle-ci, ce qui ne permet pas de se prononcer pour les questions 2 et 3.

Un prolongement possible de cette activité est de faire un débat sur les productions d'élèves ou de groupes. Ce débat pourrait permettre d'aboutir à un bilan dont l'objectif est de mettre en évidence les deux règles d'inférence pour une implication qui n'est pas une équivalence. Ceci pourrait permettre d'institutionnaliser la règle du Modus Ponens en la mettant en relation avec ce qui a été vu au collège en classe de quatrième, ainsi que la règle du Modus Tollens qui sont toutes deux essentielles pour une appropriation adéquate du concept d'implication, et d'institutionnaliser les deux cas où l'on ne peut pas faire de déduction (Durand-Guerrier, 1999). Cette activité peut permettre également d'aborder la question du domaine de quantification et de l'importance de l'identifier pour pouvoir engager un traitement logique des questions proposées.

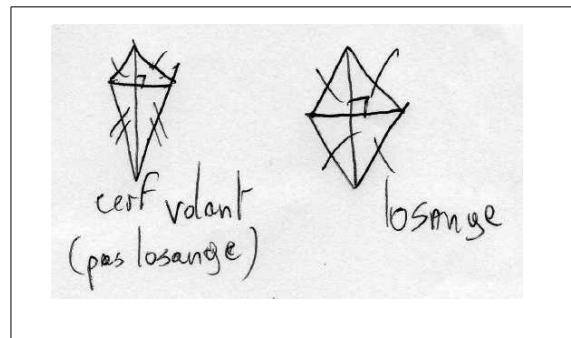
#### **4.2 Le problème « A propos de losanges »**

Pour ce problème, deux modalités différentes ont été proposées au sein des classes : un débat en demi-groupe ou un travail par groupe de 4 personnes (à rendre sur feuille).

Pour la première question, les trois types de réponses attendues sont apparus.

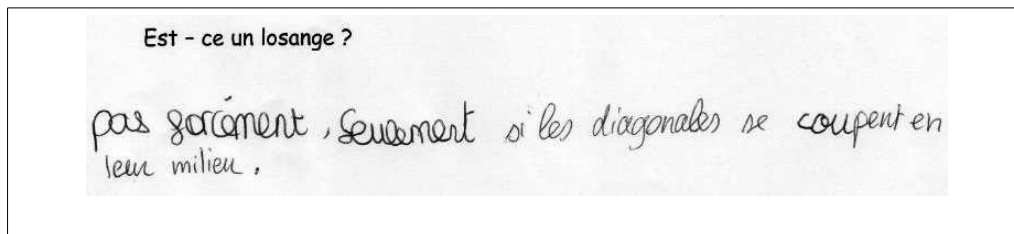
*Trois réponses « on ne peut pas savoir » qui sont :*

– soit accompagnées de dessins de losange et de cerf-volant, qui montre que la propriété "avoir ses diagonales perpendiculaires" n'est pas suffisante pour être un losange. Ceci est une justification complète de la réponse « on ne peut pas savoir » : l'énoncé ouvert admet à la fois des exemples et des contre-exemples, et on considère ici une instance singulière de cet énoncé ouvert.



**Figure 14.** Extrait de copie n° 7 – Dessin d'un losange et d'un cerf-volant

– soit suivies de la condition à ajouter pour que la figure soit nécessairement un losange.



**Figure 15.** Extrait de copie n° 8 – Identification en acte que la conclusion n'est pas suffisante

– soit argumentées en s'appuyant sur l'implication « Un losange vérifie la propriété : avoir ses diagonales perpendiculaires » alors que la réciproque est fausse.

Dans les trois cas, ces groupes ont compris que la question ne portait pas sur la valeur de vérité de l'énoncé universellement quantifié ; leur réponse peut s'interpréter comme la reconnaissance en acte que la question porte sur une instance de l'implication ouverte entre propriétés.

*La réponse « non » est apparue deux fois*

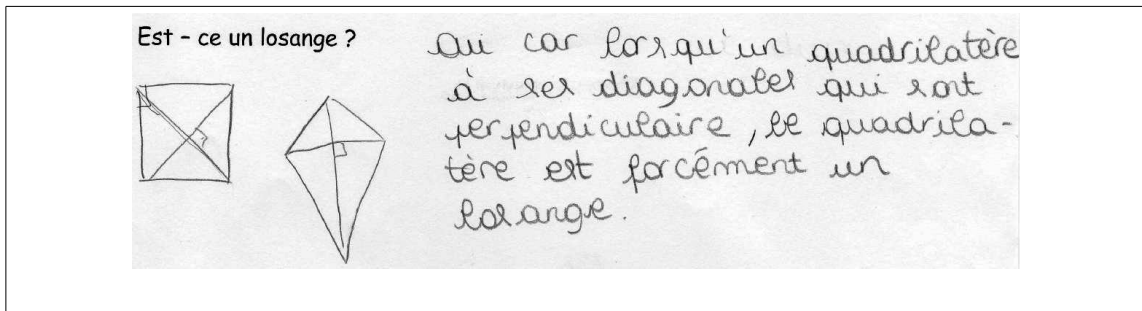
– soit en proposant un contre-exemple ;  
 – soit en expliquant que la condition "avoir ses diagonales perpendiculaires" n'est pas suffisante. Les élèves utilisent le principe du maximum d'informations donc pour eux les diagonales du quadrilatère ne se coupent pas en leur milieu puisque ce n'est pas spécifié.

Pour ces deux groupes, bien que les élèves n'aient pas utilisés ces termes, leurs réponses indiquent qu'ils ont fait la distinction entre *condition nécessaire* et *condition suffisante*. L'un des groupes a eu l'idée de proposer un contre-exemple pour nier la proposition. Ils n'ont par contre pas compris le caractère non quantifié de la proposition.

*La réponse « oui » est apparue trois fois*

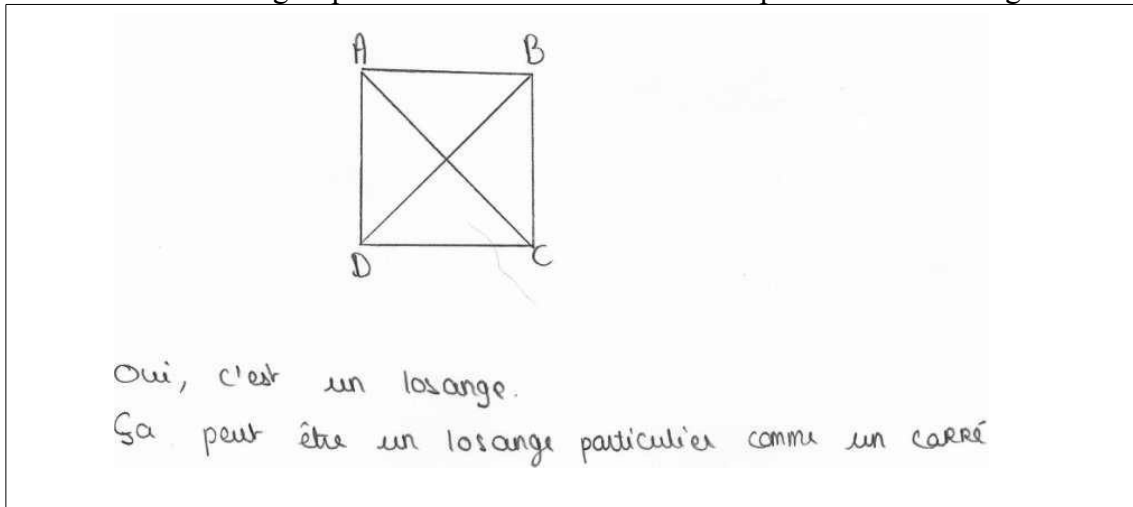
Elle provient de la méconnaissance de la définition du losange. Un groupe considère le cerf-volant comme un losange et ne propose pas d'autre contre-exemple.





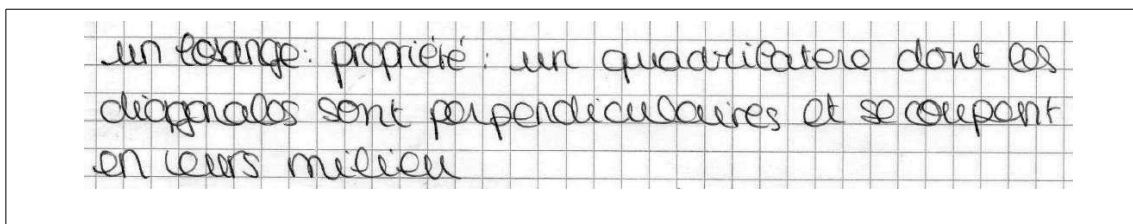
**Figure 16.** Extrait de copie n° 9 – Dessin d'un cerf-volant considéré comme un exemple

Les élèves de l'autre groupe dessinent un carré comme cas particulier de losange.



**Figure 17.** Extrait de copie n° 10 – Dessin d'un carré comme cas particulier de losange

Pour ce qui est de la deuxième question, tous les élèves ont répondu « oui ». Plusieurs justifications ont été proposées. Certains groupes remarquent que dans l'ensemble des parallélogrammes, « avoir ses diagonales perpendiculaires » est une condition suffisante pour être un losange. Un autre groupe utilise directement la caractérisation des losanges parmi les quadrilatères à partir des propriétés de leurs diagonales.



**Figure 18.** Extrait de copie n° 11 – Caractérisation du losange par les propriétés des diagonales

Enfin, un groupe qui donne la définition du losange sous la forme : « être un quadrilatère ayant les quatre côtés de même longueur » propose une démonstration mathématique que nous présentons en annexe n°2.

En conclusion, comme nous l'avions prévu dans l'analyse *a priori*, bien que les élèves aient étudié les quadrilatères depuis l'école primaire et tout au long du collège, la fragilité des connaissances mathématiques doit être prise en compte si l'on veut conduire en seconde un travail sur les concepts de logique, en particulier sur les notions de *condition nécessaire* et de *condition suffisante* en appui sur les quadrilatères. Les résultats observés sont proche de ceux qui avaient été observé avec des étudiants en début d'université par Durand-Guerrier, (1999, p. 74-75). Nous faisons l'hypothèse qu'un travail sur les quadrilatères au collège prenant en compte ces questions de logique pourrait contribuer à asseoir les connaissances de collège des élèves sur les quadrilatères, connaissances utiles pour tous les élèves, et pas seulement ceux qui vont suivre des études générales.

### 4.3 Le problème « Implications mathématiques »

Le problème a été proposé à l'aide d'un diaporama sous la forme de débat dans une classe et sous la forme d'un travail individuel écrit dans l'autre classe. Tout au long de notre analyse, question par question, nous proposerons des statistiques s'appuyant sur 27 copies écrites (Annexe 3) et nous compléterons avec des éléments provenant du débat.

1) Si les droites  $d$  et  $d'$  sont sécantes alors les droites  $d$  et  $d'$  sont perpendiculaires.

Au sujet de la question 1, 20 élèves ont proposé la réponse attendue. La valeur de vérité de l'implication est toujours accompagnée d'un contre-exemple où les droites sont sécantes mais pas perpendiculaires. Conformément à ce que nous avons indiqué dans la partie théorique, le fait qu'une implication entre propositions  $A \Rightarrow B$  soit fausse lorsque « A » est vraie et « B » est fausse est en accord avec la logique de sens commun.

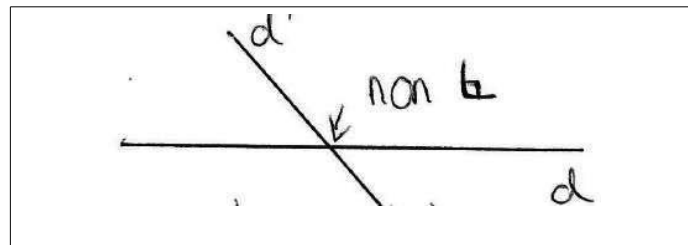


Figure 19. Extrait de copie n° 12 – Dessin d'un contre-exemple explicite

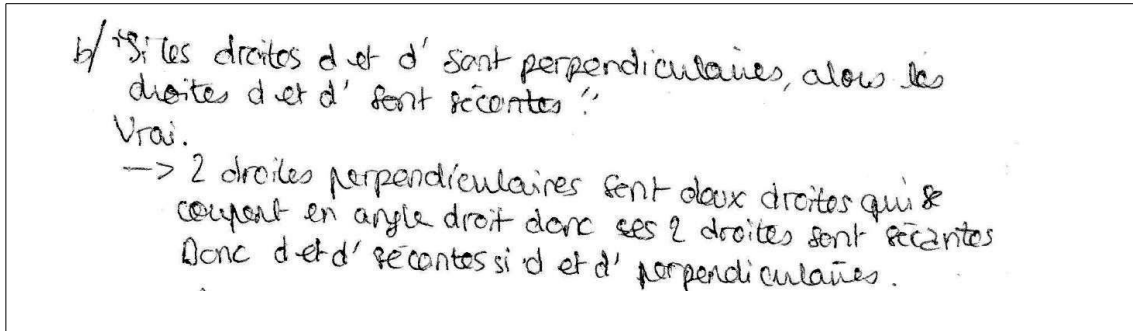
Lors du débat, une autre réponse est apparue : « on ne peut pas savoir ». Les élèves qui proposent cette réponse considèrent qu'il y a des cas pour lesquels l'implication est vraie et des cas pour lesquels l'implication est fausse donc on ne peut statuer de sa vérité. Ils n'ont donc pas identifié la quantification universelle implicite. La réciproque est énoncée correctement dans tous les cas.

Comme prévu, la symétrie des propositions facilite la formulation de celle-ci. Cependant, trois cas sont à distinguer.

- Certains élèves ne justifient pas leur réponse.
- Dix élèves proposent un exemple sous la forme d'un dessin. Ces élèves semblent penser qu'un exemple suffit à montrer que la réciproque est vraie, de la même façon qu'un contre-exemple suffit à montrer qu'une implication est fausse. Le nombre significatif de réponses de ce type peut provenir d'un souhait d'uniformisation de leur

réponse, à savoir la production d'un dessin pour l'implication et, de même, la production d'un dessin pour la réciproque.

– Les autres élèves s'appuient sur un raisonnement déductif pour montrer que l'implication réciproque est vraie. Ils supposent que la prémisse est vraie et tentent par une succession d'étapes de montrer que la conclusion est vraie :



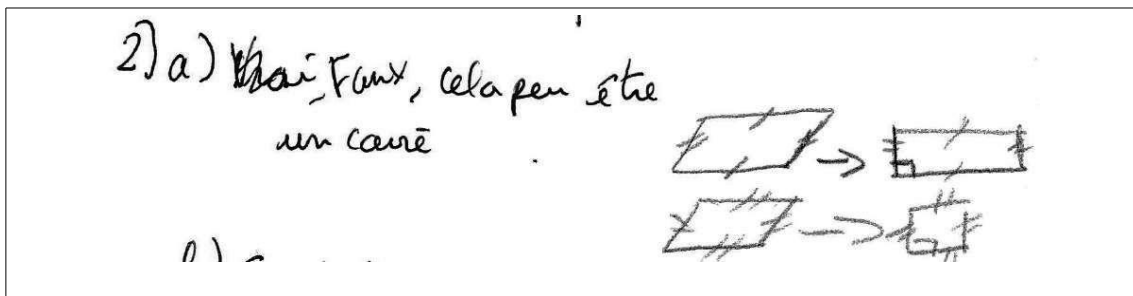
**Figure 20.** Extrait de copie n° 13 – Essai de preuve de la vérité de l'implication réciproque

Peu de réponses erronées sont apparues : un élève semble confondre *implication directe* et *implication réciproque*, un autre semble confondre *parallèle* et *perpendiculaire*. Cette activité permet de confirmer le fait bien connu des enseignants à l'université que la règle du contre-exemple est disponible dans des cadres mathématiques maîtrisés.

2) Si le quadrilatère ABCD est un parallélogramme avec un angle droit alors c'est un rectangle.

Concernant la question 2, seulement 7 élèves ont proposé la réponse attendue, 5 élèves ont proposé des réponses du type F-V ou V-F et 15 élèves n'ont pas ou mal énoncé la réciproque. Parmi les réponses correctes, certaines justifications montrent une utilisation d'une propriété caractéristique du rectangle : « être un parallélogramme avec un angle droit » qui permet de conclure pour le statut des deux implications. Par conséquent, la distinction entre l'implication directe et sa réciproque n'est pas nécessaire ici ; en effet, d'un point de vue sémantique, cette distinction est nécessaire seulement dans les cas où l'une des deux implications est vraie tandis que l'autre est fausse.

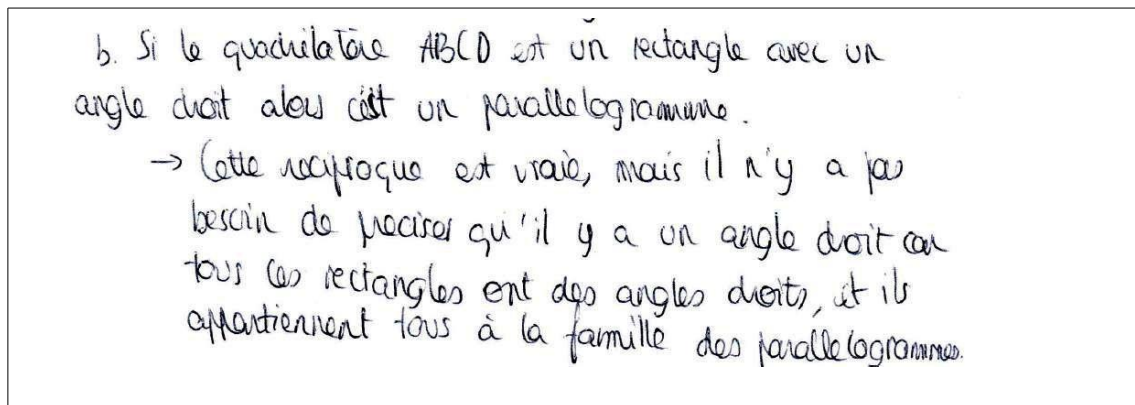
Les élèves ayant répondu faux à l'implication considèrent qu'un carré n'est pas un rectangle. Par conséquent, pour ces élèves, le carré est un contre-exemple à l'implication :



**Figure 21.** Extrait de copie n° 14 – Dessin d'un carré considéré comme contre-exemple

Les élèves qui ont répondu que la réciproque de l'énoncé initial est fautive ne donnent aucune justification, il n'est donc pas possible d'analyser leur raisonnement. Cependant, lors du débat, des élèves ayant donné le même type de réponse justifient leur décision. Certains ne considèrent pas la réciproque comme vraie car ils ont l'impression de perdre de l'information (passage de quatre angles droits à un angle droit). Or, pour eux l'implication doit apporter quelque chose de supplémentaire et non le contraire. De plus, certains pensent que le parallélogramme doit posséder « exactement un » angle droit. Ils ont donc mal interprété le sens du « un » dans cette phrase.

Dans plus de la moitié des productions, la réciproque est mal énoncée. Comme nous l'avions prévu dans l'analyse *a priori*, la quantification implicite et la non-symétrie des propositions nécessitent de produire des formulations intermédiaires. Les élèves proposent des énoncés variés du type :



**Figure 22.** Extrait de copie n° 15 –Échange des termes « parallélogramme » et « rectangle »

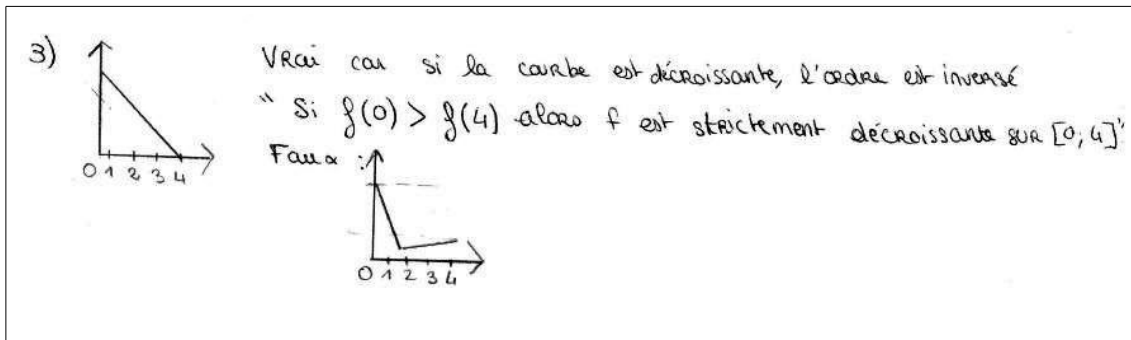
Cet élève construit sa réciproque en échangeant les termes « parallélogramme » et « rectangle », sans prendre en compte le fait que la propriété antécédente est « être un parallélogramme avec un angle droit ». Il remarque que sa formulation de la réciproque comporte des informations redondantes. En effet, un rectangle a au moins un angle droit donc la proposition « être un rectangle » est logiquement équivalente à « être un rectangle avec un angle droit ». D'autre part, il justifie que la réciproque est vraie car l'ensemble des rectangles est inclus dans l'ensemble des parallélogrammes : il mobilise donc le point de vue ensembliste de l'implication<sup>8</sup>.

Le fait d'avoir nommé le quadrilatère peut amener les élèves à considérer que l'on parle d'un objet singulier. Les résultats pour cette question confirment les hypothèses faites dans l'analyse *a priori* sur les difficultés à produire la réciproque de cet énoncé.

3) Si  $f$  est strictement décroissante sur  $[0 ; 4]$  alors  $f(0) > f(4)$ .

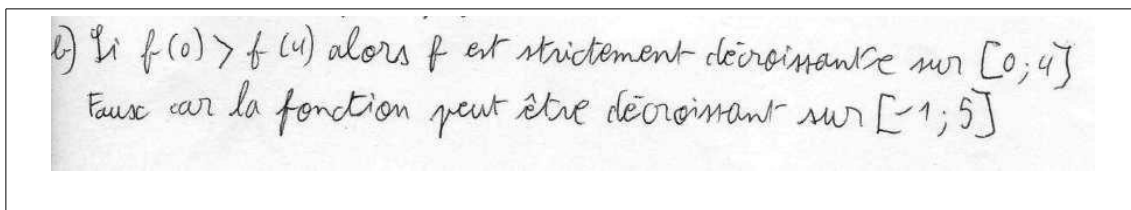
Nous nous attachons pour cette question aux réponses du type Vrai-Vrai apparues 8 fois et celles du type Vrai-Faux apparues 4 fois. Concernant la réponse correcte (Vrai-Faux), la vérité de l'implication est une conséquence de la définition de la décroissance d'une fonction. Un contre-exemple permet de montrer que la réciproque est fautive :

<sup>8</sup> Pour un développement sur ce point de vue, voir par exemple Deloustal-Jorrand (2000-2001).



**Figure 23.** Extrait de copie n° 16 – Dessin d'un contre-exemple à la réciproque

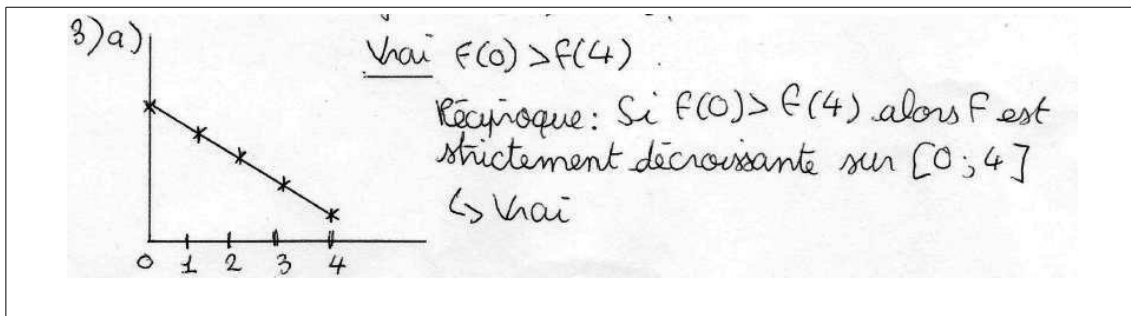
Le fait que la réciproque soit fautive est parfois associé à une perte d'information :



**Figure 24.** Extrait de copie n° 17 – Mise en œuvre du principe du maximum d'information

Cette production montre que l'élève semble considérer tout de même qu'il est possible de passer du cas particulier au cas général, erreur que l'on avait prévue.

Le type de réponse Vrai-Vrai est soit lié au domaine de quantification de l'implication, soit à la définition de la décroissance. Pour le premier cas, le domaine de quantification considéré est celui des fonctions affines :



**Figure 25.** Extrait de copie n° 18 – Dessin d'une fonction affine décroissante

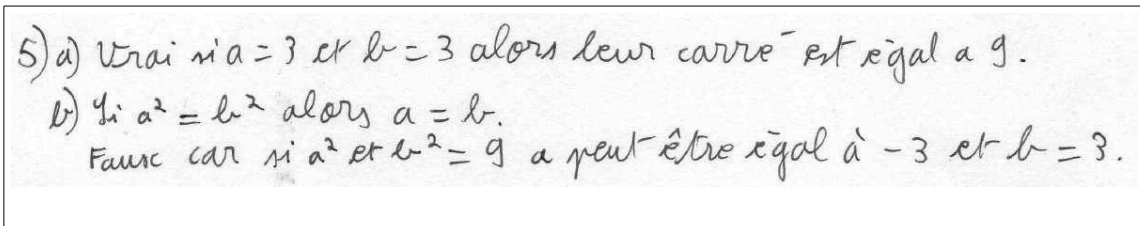
Si on se place dans le cadre des fonctions affines, la réponse « l'implication réciproque est vraie » est mathématiquement correcte. Lors de l'étude de la décroissance de fonctions, certains implicites entraînent ces conceptions erronées. Une autre hypothèse possible est que les élèves maîtrisant plus particulièrement les fonctions affines ne disposent d'exemples et de contre-exemples que dans cette famille de fonctions. Du fait que l'ensemble des fonctions à disposition des élèves est limité, ils utilisent en priorité celles qui leur sont les plus familières à ce niveau d'enseignement, à savoir les fonctions affines.

L'implication choisie permet de mettre en évidence ce phénomène puisque c'est une équivalence sur le domaine des fonctions affines mais une implication vraie dont la réciproque est fautive dans le cas général, ceci étant en lien avec le fait que logique et mathématiques sont étroitement liées voire imbriquées. On retrouve ici la question du domaine de quantification et de la disponibilité du contre-exemple.

4) : Si  $a = b$  alors  $a^2 = b^2$ .

La réponse correcte (Vrai-Faux) a été proposée 10 fois<sup>9</sup>. Afin de vérifier la vérité de l'implication, deux cas de figure apparaissent :

- soit une justification s'appuyant sur le fait qu'un nombre a une unique image par une fonction, ici la fonction carrée ;
- soit un ou plusieurs exemples étayant leur réponse :

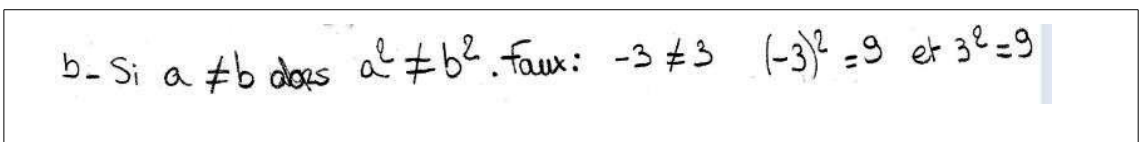


5) a) Vrai si  $a=3$  et  $b=3$  alors leur carré est égal à 9.  
 b) Faux car si  $a^2$  et  $b^2 = 9$  a peut être égal à  $-3$  et  $b = 3$ .

**Figure 26.** Extrait de copie n° 19 – Exemple pour a) et contre-exemple pour b) avec 3 et 9

L'utilisation d'un exemple pour montrer la vérité de l'implication, apparu seulement dans quelques copies de la première question, est ici majoritaire. Nous faisons l'hypothèse que la difficulté de faire une preuve à l'aide du calcul littéral est à l'origine de cette utilisation massive de la justification par l'exemple. Cet élément est apparu de manière encore plus significative lors du débat. Dans la production précédente, nous avons un exemple de la réponse attendue pour la réciproque : justifier par la production d'un contre-exemple (prémisse vraie et conclusion fautive).

Parmi ces réponses Vrai-Faux, on trouve également deux productions où les élèves utilisent la contraposée de la réciproque pour conclure, comme dans l'exemple ci-dessous :



b- Si  $a \neq b$  alors  $a^2 \neq b^2$ . faux:  $-3 \neq 3$   $(-3)^2 = 9$  et  $3^2 = 9$

**Figure 27.** Extrait de copie n° 20 – Utilisation explicite de la contraposée de la réciproque

D'autre part, 5 élèves ont répondu que l'implication était fautive. La production d'élève ci-dessous révèle une erreur de calcul qui lui fournit un contre-exemple, la réponse erronée n'est donc pas due à une erreur de logique.

<sup>9</sup> La question 4 de notre article correspond à la question 5 des productions des élèves, suite à un remaniement des questions.

5 - a) ~~vrai~~ faux  
 Contre exemple  $2 + 2 = 3 + 1$   
 $2^2 + 2^2 = 3^2 + 1^2$   
 $8 \neq 10$

**Figure 28.** Extrait de copie n° 21 – Un calcul inapproprié conduisant à la réponse Faux pour a)

Le dernier type de réponse, Vrai-Vrai, est produit par 8 élèves. Pour conclure à la vérité de l'implication (respectivement de la réciproque), les élèves utilisent la fonction carré (respectivement la fonction racine carré) :

5) a) vrai. Car si ce sont les mêmes, ils le seront même avec un carré.  
 b) Si  $a^2 = b^2$  alors  $a = b$ .  
 Vrai, car l'ont à juste fait la racine carré pour revenir au nombre de départ.

**Figure 29.** Extrait de copie n° 22 – Utilisation de la restriction de la fonction à  $\mathbb{R}^+$

Cet élève explicite le fait que la racine carrée est la bijection réciproque de la fonction carrée sur  $\mathbb{R}^+$ . Le domaine de quantification de l'implication implicitement considéré est  $\mathbb{R}^+$ . S'il suppose que c'est aussi le domaine de quantification de l'implication considéré, sa réponse est conforme à la logique. En définitive, les productions associées à cette question sont en accord avec notre analyse *a priori*.

Afin de conclure sur l'ensemble du problème, nous pouvons constater que le domaine mathématique dans lequel l'implication est énoncée a une influence importante sur les raisonnements mis en œuvre. Les résultats obtenus confortent les résultats de Durand-Guerrier (1999) selon lesquels certaines erreurs qui pourraient être interprétées dans une première approche comme des erreurs de logique sont en fait liées à l'insuffisance des connaissances mathématiques en jeu. Ce point met en évidence le fait que le travail logique peut aussi servir de révélateur de la fragilité de certaines connaissances mathématiques et peut contribuer à y remédier.

Après avoir corrigé chaque question avec l'ensemble de la classe, ce problème a permis d'explicitier un aspect du contrat didactique jusque là resté implicite : lorsque la réciproque n'est pas énoncée dans un théorème, il faut étudier sa valeur de vérité en réfléchissant par exemple à la possibilité d'un contre-exemple.

L'analyse conjointe de l'ensemble des problèmes nous permet désormais de conclure à notre questionnement.

## Conclusion

La seconde est une classe charnière dans le travail de la logique. En effet, elle permet d'approfondir et d'institutionnaliser les connaissances susceptibles de se développer au collège dans le cadre des activités d'initiation au raisonnement déductif et à la démonstration (contre-exemple, proposition conditionnelle, Modus Ponens, Modus Tollens, ...) mais aussi d'acquérir les bases nécessaires pour poursuivre sereinement l'apprentissage des mathématiques tout au long du cursus scolaire.

À travers notre étude, nous avons pu constater l'impact de la logique naturelle sur la logique mathématique. La logique naturelle permet d'introduire la logique mathématique. Dans notre expérimentation, le premier problème (les cosmonautes) met en lumière, dans un contexte concret, l'utilisation de la logique naturelle. Dans ce cas, elle est conforme à la logique mathématique, en particulier en ce qui concerne l'emploi du Modus Ponens et du Modus Tollens.

Une fois la logique mathématique introduite, nous avons proposé les deux autres problèmes qui permettent de travailler différents aspects de l'implication dans des cadres purement mathématiques. Nous considérons que les cadres mathématiques choisis doivent être variés et maîtrisés par les élèves. Le cadre mathématique influence la compréhension des propositions conditionnelles puisqu'il amène souvent une difficulté due à la notion mathématique elle-même. Par conséquent, les difficultés logiques identifiées à propos des conditions nécessaires et/ou suffisantes ou des implications qui ne sont pas des équivalences sont pour partie dues à une insuffisance des connaissances mathématiques ; les deux aspects logiques et mathématiques étant le plus souvent étroitement imbriqués. Il nous semble important que les professeurs soient suffisamment avertis de ces difficultés pour pouvoir les traiter au quotidien dans la classe. Par exemple, il est important lorsqu'on emploie le terme « condition » de préciser si elle est nécessaire et/ou suffisante. Il est également primordial de ne pas laisser implicite la valeur de vérité des implications réciproques des théorèmes travaillés en cours, mais de poser systématiquement la question de la valeur de vérité de cette réciproque et de travailler les justifications correspondantes.

Dans les activités que nous avons proposées, la quantification implicite semble en règle générale prise en compte par la plupart des élèves. Dans le problème sur les losanges, nous avons observé que la plupart des élèves identifient clairement qu'il s'agit d'un élément et non d'un ensemble d'éléments. Dans ce cas, la difficulté est de comprendre qu'il ne s'agit pas de statuer sur la vérité de l'implication mais seulement d'observer les conséquences d'une implication fautive sur un élément particulier. En effet, il existe des cas vrais et des cas faux : par conséquent, la réponse *on ne peut pas savoir* est celle attendue bien que peu courante en mathématiques. Dès le collège, les élèves sont habitués à manipuler des énoncés sous la forme « Si..., alors... » qui ne possèdent que rarement une quantification explicite. Dans notre expérimentation, les élèves prennent tout de même majoritairement en compte le caractère universellement quantifié des propositions conditionnelles mathématiques.

À travers le troisième problème, nous avons pu observer que certains élèves refusent de considérer qu'une implication est vraie lorsque le conséquent n'apporte pas d'informations supplémentaires par rapport à l'antécédent. Un travail spécifique doit donc être effectué sur cette conception liée à la perte d'information, qui peut aussi être l'occasion d'étudier le cas de la prémisse fautive.



Le travail que les deux premiers auteurs ont conduit au cours de l'année 2013–2014 conforte l'hypothèse selon laquelle il est important d'effectuer tout au long de l'année et dans les divers chapitres un travail continu sur les différentes notions de logique au programme pour permettre aux élèves une appropriation progressive de ces notions. Bien que les programmes ne recommandent pas l'introduction d'éléments théoriques sur la logique, nous suggérons tout de même de proposer des bilans au détour des diverses activités faisant appel de près ou de loin à la logique. En effet, bien que la logique naturelle puisse servir à initier les élèves à la logique mathématique, il est cependant nécessaire au lycée d'identifier clairement ce qui les différencie : la distinction entre implication et réciproque en mathématique et en particulier de leurs valeurs de vérité, la compatibilité entre pertes d'informations et vérité d'une implication et les cas de la prémisse fautive. Travailler ces deux aspects (les points communs et les différences) est essentiel, ceci d'autant plus que la logique est une discipline transversale qui intervient dans la plupart des domaines de la connaissance humaine, et partant des disciplines scolaires. En outre, lors de l'expérimentation, nous avons pu constater que les élèves argumentent leur choix et que nombre d'entre eux montrent aussi des compétences en acte en ce qui concerne la logique et le raisonnement mathématique. La possibilité de s'appuyer sur ces capacités est un atout dans l'enseignement des mathématiques.

## Références

- Bulletin officiel n° 30 du 23 juillet 2009, programme d'enseignement de mathématiques de la classe de seconde générale et technologique :  
<http://www.education.gouv.fr/cid28928/mene0913405a.html>
- MEN (2009) *Ressources pour la classe de seconde-Notations et raisonnements mathématiques*, Eduscol :  
[http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Programmes/18/0/Doc\\_ressource\\_raisonnement\\_109180.pdf](http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Programmes/18/0/Doc_ressource_raisonnement_109180.pdf)
- DELOUSTAL-JORRAND V. (2000-2001) L'implication. Quelques aspects dans les manuels et points de vue d'élèves-professeurs, *Petit x*, **55**, 35-70.
- DELOUSTAL-JORRAND V. (2004) *L'implication mathématique : étude épistémologique et didactique. Étude sous trois points de vue : raisonnement déductif, logique formelle et théorie des ensembles. Construction d'une situation didactique qui problématise l'implication*, thèse de l'université Grenoble I.
- DURAND-GUERRIER V. (1999) L'élève, le professeur et le labyrinthe, *Petit x*, **50**, 57-79
- DURAND-GUERRIER V. (2003) Which notion of implication is the right one? From logical considerations to a didactic perspective, *Educational Studies in Mathematics*, **53**, 5-34.
- DURAND-GUERRIER V. (2013) Quelques apports de l'analyse logique du langage pour les recherches en didactique des mathématiques, in Bronner & al. (Ed.) *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage*, Grenoble : La Pensée Sauvage.
- FABERT C., GRENIER D. (2011) Une étude didactique de quelques éléments de raisonnement mathématique et de logique, *Petit x*, **87**, 31-51
- LEGRAND, M. (1983) Les cosmonautes. Compte-rendu d'une recherche du groupe « Apprentissage du raisonnement » de l'IREM de Grenoble, *Petit x*, **1**, 56-73.

- MESNIL, Z. (2012) La place de la logique dans l'enseignement des mathématiques au lycée en France, in DORIER, Jean-Luc (Ed.), COUTAT, Sylvia (Ed.). *Enseignement des mathématiques et contrat social: enjeux et défis pour le 21e siècle. Actes du colloque EMF 2012, Genève, 3-7 février 2012*. Genève : Université de Genève, 2012, Brochure avec cédérom.
- RUSSELL, B. (1903) Les principes de la mathématique, traduction française in RUSSEL, *Ecrits de logique philosophique*, Paris : PUF, 1989
- TARSKI, A. 1936. Le concept de vérité dans les langages formalisés in *Logique, sémantique et métamathématique, volume 1* : 157-269. Armand Colin, 1972
- VERGNAUD, G. (1990) La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **10/2.3**, 133-169. Grenoble : La Pensée Sauvage.

### ANNEXE 1. Détails des réponses des 55 élèves au problème des cosmonautes

- 3 ont répondu NPPS-NPPS-NPPS-O
- 5 ont répondu N-O-N-O
- 5 ont répondu N-O-NPPS-O
- 32 ont répondu N-NPPS-NPPS-O
- 5 ont répondu N-NPPS-N-O
- 2 ont répondu N-NPPS-O-O
- 1 a répondu N-O-N-NPPS
- 1 a répondu N-O-NPPS-NPPS
- 1 a répondu N-NPPS-NPPS-NPPS

### ANNEXE 2. Démonstration proposée par un groupe dans le problème des losanges

Est - ce un losange ? un parallélogramme a ses côtés opposés de même longueur donc si ses diagonales sont perpendiculaires, ses côtés seront tous égaux.  
C'est un losange

→ On peut le démontrer avec le théorème de Pythagore :

Dans le triangle rose :

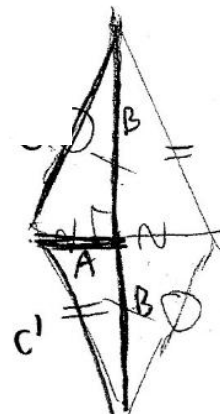
$$C^2 = B^2 + A^2$$

Dans le triangle bleu :

$$C'^2 = B^2 + A^2$$

Donc  $C = C'$

→ et les côtés opposés sont égaux donc Sarah a forcément dessiné un losange.



ANNEXE 3. Fichier détaillé des réponses au problème sur les propositions conditionnelles

Elève\Question	1a	réciroque	1b	2a	réciroque	2b	3a	réciroque	3b	5a	réciroque	5b
1	F	1	V	V	1	V	V	1	F	V	1	V
2	F	1	V	V	1	V	V	1	V	V	1	V
3	F	1	V	F	1	V	V	1	F	V	1	F
4	F	0		V	0		V	0		V		
5	F	1	V	V	1	F	V	1		V		
6	F	1	V	V	0		V	1	V	V	1	
7	F	1	V	F	0		F	1	V	V	contraposée	F
8	F	1	F	V	1	V	V			V	contraposée	F
9	F	1	V	F	1	V	F	1	F	V	1	F
10	F	1	V	V	0		V	1	V	V	1	F
11	Pas forc.	1	V	V	0		V	1	V	V	1	V
12	F	1	V	V	0		V	1	V	F	1	V
13	F	1	V	V	1	F	F	1	V	F	1	V
14	Pas forc.	0		F	0		V	1		V	1	V
15	V	1	F	V	1	F	V	1		V	1	F
16	F	1	V	V	0		V	1		F	contraposée	V
17	F	1	V	V	1	V		1		F	1	F
18	F	1	V	V	1	V		1		V	1	V
19	F	1	V	V	0		V	0		V	0	F
20	F	1	V	V			V			V		
21		1		F	0		F	0		V	1	
22	Pas forc.	0		V	0		F	1		V	1	V
23	F	1	V	V	1	V	V	1	V	V	0	
24	F	1	V	V	0		V	1	V	V	1	F
25	F	1	V	F	0		V	1	V	V	1	V
26	F	1	V	V	1	V	V	1	F	V	1	V
27	F	1	V	V	0		V	1	F	F	1	
28	F	1	V	V	0					V	1	F