LA DISTRIBUTIVITÉ : QUELLES CONNAISSANCES POUR ENSEIGNER LA MULTIPLICATION À L'ÉCOLE PRIMAIRE ?

Céline CONSTANTIN
ESPE, Université de Montpellier, FdE Site de Nîmes
I2M, Aix-Marseille Université

Introduction

Bien avant d'être formalisée pour le calcul algébrique au collège, la propriété de distributivité fonctionne de manière implicite dans l'enseignement et l'apprentissage de la multiplication à l'école primaire au travers de pratiques numériques de calcul mental et posé. Ainsi, pour multiplier mentalement deux nombres entiers, il est possible d'utiliser la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ou à la soustraction. « La multiplication posée » correspondant à l'algorithme usuellement enseigné convoque cette même propriété par rapport à l'addition. À l'occasion d'une recherche (Constantin, 2014), nous avons été amenée à constater qu'au moment de son introduction officielle au collège, les manuels n'envisagent pas d'articulation véritable avec ces connaissances anciennes comme un enjeu d'enseignement.

Ces résultats font écho à bien d'autres recherches qui montrent que la distributivité n'est pas mise en avant dans les manuels pour justifier ou légitimer les calculs au collège (Assude, Coppé et Pressiat, 2012) tandis que d'autres encore observent les difficultés d'élèves à considérer cette propriété comme une loi générale gouvernant à la fois les systèmes de nombres et les expressions algébriques (Kieran, 1989 ; Sfard et Linchevski, 1994 ou Mok, 2010, par exemple). Ceci nous amène à supposer que la distributivité peut d'une part ne pas se constituer pour les élèves comme savoir unifiant des connaissances numériques et algébriques, et d'autre part ne pas jouer son rôle pour soutenir les techniques de calcul enseignées et apprises à l'école et au collège.

Dès lors, ce texte propose d'interroger la construction ou la reconstruction de ces liens comme connaissances mathématiques et didactiques pour le professeur en faisant l'hypothèse que ces articulations peuvent être utiles pour l'enseignement des techniques de calcul de multiplications fondées sur la propriété de distributivité à l'école primaire.

Nous cherchons à caractériser à la fois des besoins de connaissances potentiels pour l'enseignant et des obstacles éventuels à l'émergence de ce que Ball et *al.* (2008) nomment des connaissances mathématiques spécifiques pour l'enseignement :

> *Les enseignants doivent connaître les fondements des procédures, le sens des termes, et l'explication des concepts. Les enseignants ont besoin de moyens efficaces pour représenter la*

signification de l'algorithme de soustraction non seulement pour confirmer la réponse mais aussi pour montrer le sens des étapes de la procédure et les raisons de leur validité. Il ne s'agit pas de ce que les enseignants doivent enseigner aux enfants, mais de ce que les enseignants eux-mêmes ont besoin de savoir et d'être capables de faire pour conduire cet enseignement[1]*. (Ball & al., 2008 p. 398).*

Le cloisonnement possible des savoirs apparentés à la distributivité dans les cadres numérique et algébrique et l'affaiblissement, voire l'absence de son rôle justificateur pour les calculs nous a amenée à nous intéresser à une année de formation particulière où l'articulation de ces connaissances peut se rencontrer : celui de la première année de Master MEEF premier degré.

Faisant l'hypothèse que l'étude des savoirs à enseigner et enseignés à l'école et au collège peut être un indicateur de l'état de l'organisation des connaissances mathématiques des futurs professeurs des écoles, nous proposons dans un premier temps d'observer les spécificités du fonctionnement de la distributivité dans l'enseignement de la multiplication en primaire et au début du collège en nous appuyant sur des analyses d'extraits de manuels. Ces analyses ont également pour but de renseigner sur les caractéristiques des connaissances mathématiques ou didactiques nécessaires pour le professeur.

Dans un second temps, à partir de réponses à un questionnaire soumis à des étudiants, nous cherchons à déterminer comment ces connaissances peuvent se (re-)construire, se réorganiser et s'articuler avec des connaissances didactiques émergentes pour l'enseignement de la multiplication dans un contexte lié à la préparation du CRPE. Les résultats de cette étude nous permettront de mettre à jour des obstacles potentiels à ces réorganisations et d'en dégager de possibles enjeux de formation.

Cadre théorique et méthodologie

Des besoins de connaissances mathématiques spécifiques pour l'enseignement de l'algorithme de multiplication posée ont été identifiés dans de nombreux travaux à la suite de Ma (1999). Clivaz (2016) observe ainsi des pratiques d'enseignants qui montrent qu'en l'absence de telles connaissances, les discours se centrent sur l'action ou sur les manipulations des écritures sans lien véritable avec les propriétés mathématiques permettant de les légitimer ou de les éclairer. Ces connaissances relèvent à la fois de la distributivité, de propriétés liées à la numération décimale de position, ou de définitions de la multiplication. Les analyses des connaissances d'une enseignante en particulier montrent que l'identification de la distributivité comme fonctionnant à la fois pour le calcul mental et posé n'est pas suffisante pour penser des liens et un discours pertinents pour la classe. L'auteur relate ainsi un épisode de classe où l'enseignante rappelle un calcul donné en devoir en écrivant $24\times3=(20\times3)+(4\times3)$ pour justifier l'addition nécessaire dans la multiplication posée de 583×35 après avoir effectué 583×5 :

Tout d'abord la comparaison entre la multiplication 583×35 et 24×3 n'est pas utilisée à bon escient puisqu'il s'agit une fois de « distributivité à gauche » et l'autre fois de « distributivité à droite »[2]*. Ensuite, cette explication ne vient qu'en appui d'une technique déjà présentée lors de la leçon précédente, un peu comme un moyen de se souvenir qu'il faut additionner [...]. Autrement*

[1] Traduction par l'auteure.

[2] Dans le premier calcul, l'utilisation de la distributivité repose sur l'égalité $583\times35=(583\times5)+(583\times30)$, le facteur décomposé en $30+5$ est celui qui est écrit à droite dans le produit, et la distributivité est dite « à gauche ». Dans le second calcul, l'égalité est $24\times3=(20\times3)+(4\times3)$, la décomposition en $20+4$ concerne le facteur écrit à gauche dans le produit et la distributivité est dite « à droite ».

dit, là encore, l'interaction n'est pas au niveau mathématique (Clivaz, 2016 p. 251).

Ceci nous amène à réinterpréter les résultats que nous avons obtenus (Constantin, 2014) quant aux spécificités et à la place de la propriété de distributivité au travers de ses usages à l'école primaire. Il s'agit pour nous d'une étude préliminaire des différentes formes de ce savoir, en amont d'une caractérisation des connaissances mathématiques nécessaires ou utiles pour l'enseignant. Nous intéressant à l'articulation entre numérique et algébrique, nous cherchons de plus à déterminer comment les connaissances anciennes liées à l'enseignement de la multiplication au primaire peuvent se conjuguer avec des connaissances nouvelles liées à l'enseignement de techniques de calcul algébrique au moment de l'introduction de la propriété de distributivité comme savoir à enseigner officiel au collège.

Dans le cadre de la théorie anthropologique (Chevallard, 1997), la notion de praxéologie permet de décrire l'articulation de différentes organisations de savoir au travers des différentes pratiques qu'elles engagent au sein d'une institution. Quatre composantes définissent une praxéologie. Les deux premières associent un certain type de tâches à accomplir, et une technique permettant de le faire. Les deux dernières relèvent de discours raisonnés sur la technique : la technologie justifie et éclaire la technique, en donne un certain domaine de validité, et la théorie à son tour vient légitimer à un autre niveau la technologie. Ainsi, pour calculer 34×12, une technique possible consiste à effectuer mentalement le calcul en multipliant 34 par 2 puis par 10, puis à additionner les résultats. Ce calcul repose sur l'égalité $34\times(10+2)=(34\times10)+(34\times2)$. Celle-ci est une instanciation de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition formalisée à l'aide de l'écriture algébrique suivante : $k(a+b)=ka+kb$, où *k*, *a*, et *b* peuvent désigner des nombres entiers quelconques. Plusieurs cadres théoriques peuvent être envisagés pour justifier l'égalité. Par exemple la définition de la multiplication à partir d'additions itérées permet d'écrire : $34\times(10+2)=34+34+34+34+34+34+34+34+34+34+34+34$ puis de regrouper les dix premiers termes correspondant à 34×10 et les deux derniers correspondant à 34×2 par associativité de l'addition. Dans la théorie liée aux grandeurs et à leurs mesures, l'on peut considérer le produit comme mesure de l'aire d'un rectangle, ici de longueur 34 unités et de largeur 12. En découpant le rectangle en deux rectangles de 34 par 10 et de 34 par 2, l'on obtient l'égalité en vertu de propriétés liées aux aires (l'aire de la réunion de deux rectangles disjoints étant égale à la somme des aires de ces rectangles).

Cherchant à observer comment les praxéologies convoquant la distributivité dans l'enseignement de la multiplication à l'école primaire peuvent se construire et s'articuler avec les praxéologies de calcul algébrique, nous avons choisi de proposer un questionnaire à des étudiants n'ayant pas encore reçu de formation spécifique lié à l'enseignement des techniques opératoires, mais ayant toutefois travaillé des analyses en didactique et des contenus mathématiques liés à la numération décimale de position et au calcul algébrique. À cette occasion, la propriété de distributivité, ainsi que des calculs d'aires ont été abordés dans le cadre de travaux dirigés. Le questionnaire a été soumis au mois de décembre 2015 à une cohorte de 19 étudiants en première année de Master MEEF premier degré considérés par leur formateur comme ayant de bonnes connaissances mathématiques, ce qui nous permet d'envisager des conditions favorables pour l'émergence des articulations que nous cherchons à observer. Il a été proposé sous la forme d'un travail sur table individuel en temps limité.

La deuxième partie de ce texte présente ce questionnaire, ainsi que les résultats des analyses de notre corpus. Celles-ci ont pour but de mettre en regard les connaissances mathématiques et didactiques que les professeurs interrogés donnent à voir pour dégager des conditions ou des contraintes pour les reconstructions considérées.

La distributivité dans l'enseignement de la multiplication à l'école primaire et au collège

La propriété de distributivité apparaît actuellement dans les programmes de l'école primaire (BO, 2015) dès le cycle 2. Il s'agit d'*« utiliser les propriétés des opérations, y compris celles du type* $5\times 12=5\times 10+5\times 2$ *».* La même égalité est reprise dans les programmes du cycle 3. Comme dans les programmes précédents, la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition apparaît comme savoir implicite à enseigner dans le sens où elle ne sera pas objet d'étude à ce niveau d'enseignement, mais un élément technologique fonctionnant en arrière-plan des techniques de calcul et permettant de les décrire sans être nommé. Cela ne signifie pas que les praxéologies à enseigner à l'école primaire se réduisent pour autant à leur composante praxique, mais la distributivité ne sera formalisée qu'en cycle 4 où son domaine de validité, sa justification et sa généralisation pourront alors être à l'étude, en lien avec la construction d'une certaine théorie algébrique. Or, comme nous l'avons vu plus haut, l'utilisation de la distributivité peut reposer sur des égalités de formes diverses renvoyant à des caractéristiques différentes de la propriété. Afin de les préciser, nous proposons d'illustrer nos résultats d'analyses à partir d'extraits des manuels *Euro Maths CM1, Euro Maths CM2* (2009, 2010), *Cap Maths CM2* (2010) et *À portée de maths CM1* (2006) pour le primaire, ainsi que des manuels de 6^{e} *Transmath* (2013), *Phare* (2009) et *Triangle* (2009)[3]. Nous cherchons à caractériser des pratiques numériques engageant potentiellement l'utilisation de la distributivité dans l'enseignement de la multiplication à l'école primaire, et leur devenir au moment où cette propriété se fait objet officiel d'enseignement au collège.

Calcul posé

L'une des techniques permettant de calculer un produit posé de deux nombres entiers consiste à décomposer l'un des facteurs en somme puis à calculer la somme des produits partiels du second facteur par chacun des termes obtenus. Examinons l'extrait de manuel de CM2 suivant :

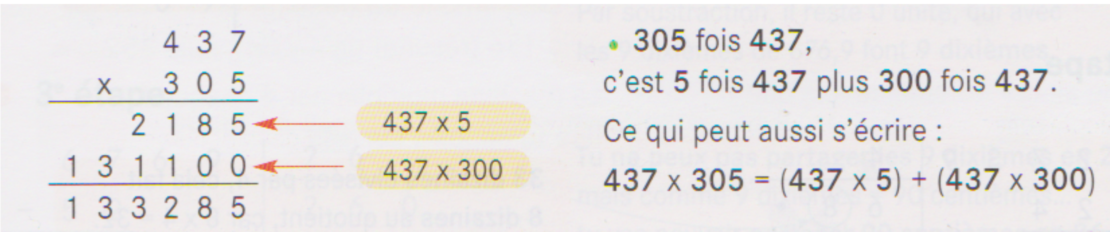


Figure 1 : *Cap Maths CM2 2010*, Le Dico Maths p. 19.

Dans cet exemple, la technique consiste à décomposer 305 en $5+300$ puis à calculer 437×5 et 437×300 avant d'ajouter les résultats. Les écritures fléchées et le discours qui l'accompagnent suggèrent qu'elle repose implicitement sur l'égalité $437\times(5+300)=(437\times 5)+(437\times 300)$, ce qui correspond à l'usage de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition sous sa

[3] Notons que ces éditions correspondent aux anciens programmes (MEN, 2008). Toutefois, notre étude étant qualitative, c'est-à-dire cherchant à déterminer des formes possibles de savoir, et les instructions officielles concernant le choix d'un algorithme de multiplication posée, ou l'utilisation implicite de la distributivité en calcul mental n'ayant pas varié, les résultats nous paraissent potentiellement reproductibles. Dans les nouveaux programmes (MEN, 2015), le développement et la factorisation sont repoussés en 4^{e} au lieu de la 5^{e}, de nouvelles analyses de manuels de collège récents seraient à conduire pour déterminer si les caractéristiques présentées ici au moment de l'introduction de la propriété de distributivité demeurent.

forme simple. Toutefois, la rhétorique soutenant les calculs des produits partiels s'appuie usuellement sur les chiffres (des unités, des dizaines...). Par exemple, le discours accompagnant l'écriture de la première ligne peut être le suivant : « je calcule 5 fois 7 qui me donne 35, je pose 5 et retiens 3, puis je calcule 5 fois 3 qui donne 15, et 3 de retenue, 18, je pose 8 je retiens 1, et enfin, je calcule 5 fois 4 qui donne 20 et 1 de retenue, qui donne 21 ». La concaténation des écritures de droite à gauche donne 2 185. Ce faisant, la valeur des chiffres peut être omise dans le discours et se retrouve par leur position après coup. L'égalité implicitement à l'œuvre pourrait alors être formalisée de la manière suivante :

$$(7+30+400)\times(5+300)=[7\times5+(3\times5)\times10+(4\times5)\times100]+[7\times3+(3\times3)\times10+(4\times3)\times100]\times100 .$$

Celle-ci correspond à une forme double de la distributivité avec une extension à une somme de trois termes. Si l'écriture des produits partiels dans l'extrait précédent insiste sur la forme simple de la distributivité implicitement mobilisée, des articulations entre ces différentes formes de savoir peuvent être mises en avant dans les manuels :

	300	70	4
20	20 x 300	20 x 70	20 x 4
6	6 x 300	6 x 70	6 x 4

20 x 374 = (20 x 300) + (20 x 70) + (20 x 4)
20 x 374 = ... + ... + ... = ...
6 x 374 = (... x ...) + (... x ...) + (... x ...)
6 x 374 = ... + ... + ... = ...

374 x 26 = (20 x 374) + (6 x 374) = ... + ... = ...

Figure 2 : *EuroMaths CM1 2009*, p. 64.

Les égalités à droite permettent de passer d'une somme de produits partiels issus de la double distributivité : $(20\times300)+(20\times70)+(20\times4)$ à l'un des produits partiels issus de la simple distributivité : (20×374), ce dernier correspondant au résultat de la deuxième ligne du calcul posé. L'insistance sur ce lien se manifeste également par la consigne suivante pour les identifier :

3 Dans le découpage de Qwang, colorie en jaune les rectangles qui correspondent à 6 x 374 et en bleu les rectangles qui correspondent à 20 x 374.

Figure 3 : *EuroMaths CM1 2009*, p. 64.

On trouve sur la même page une écriture des décompositions en colonne, ce qui peut permettre de soutenir une description fondée sur les chiffres en appui sur les propriétés de la numération décimale de position :

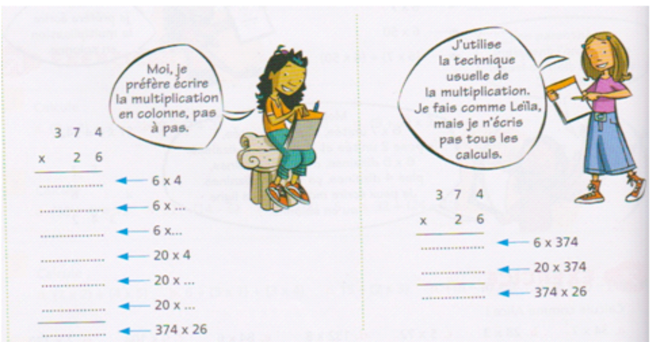


Figure 4 : *EuroMaths CM1 2009*, p. 64.

Ce manuel montre ainsi un enseignement de la multiplication posée qui s'appuie implicitement sur la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition à la fois sous sa forme simple et sous sa forme double. Si le choix est laissé aux élèves, des passages entre ces deux formes de savoir sont organisés au moyen de décompositions et recompositions autour des facteurs et des produits partiels. On observe également des occasions d'articuler diverses représentations (en ligne en colonne, en tableau) et potentiellement divers discours entre les éléments technologiques apparentés à la numération décimale de position et ceux apparentés à la distributivité. De semblables projets de construction de liens existent dans d'autres manuels (*À portée de maths CM1* par exemple). Ceci nous amène à supposer que de telles organisations doivent faire partie des connaissances mathématiques des enseignants, et les liens entre simple et double distributivité et leur rapport avec les discours identifiés.

La distributivité a visiblement une place plus restreinte en 6e qu'au primaire pour soutenir les techniques de calcul posé de produits. Les multiplications données à poser relèvent essentiellement de produits de nombres décimaux non entiers. Les discours technologiques se centrent donc sur les éléments nouveaux liés à la numération. Ils insistent sur la place de la virgule, ou colorent en rouge l'écriture des zéros, voire ne mentionnent plus les produits partiels. C'est le cas par exemple des manuels *Phare* ou *Triangle*, dont les choix de formalismes peuvent masquer plus encore l'utilisation implicite de la distributivité et les produits partiels afférents par l'emploi de points plutôt que de zéros pour écrire les résultats intermédiaires :

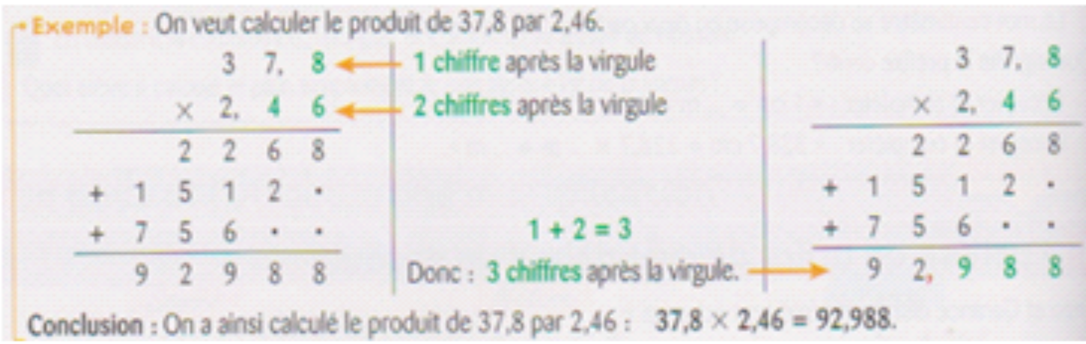


Figure 5 : *Phare 6e 2009*, p. 62.

Aucun des six manuels analysés à l'occasion de notre recherche (Constantin, 2014) ne propose, au moment de l'introduction de la propriété de distributivité comme savoir officiel d'enseignement au collège, de se saisir des connaissances anciennes liées à la multiplication posée. Ceci nous amène à supposer que les praxéologies alors construites puissent ne pas être complétées au niveau technologique par ce savoir.

Examinons ce qu'il en est pour le calcul mental.

Calcul mental

L'une des techniques permettant de calculer le produit de deux nombres entiers mentalement consiste à décomposer l'un des facteurs en somme ou en différence, puis à la calculer la somme ou la différence des produits partiels du second facteur par chacun des termes obtenus. L'extrait suivant permet d'observer des spécimens relevant potentiellement de ce bloc praxique en CM2 :

Calcul automatisé, calcul réfléchi

Objectif : effectuer, mentalement ou avec l'aide de l'écrit, des calculs sur des nombres entiers en utilisant de façon implicite les propriétés des nombres et des opérations.

1 Calcule les produits :

a. 15×11 b. 15×9 c. 14×12 d. 14×15 e. 13×21 f. 13×19

Figure 6 : *EuroMaths CM2 2009*, p. 185.

On peut envisager par exemple pour calculer 14×12 d'effectuer les produits 14×10 et 14×2 puis d'ajouter les résultats. De telles descriptions apparaissent dans le document ressources intitulé *Le nombre au cycle 3, Apprentissages numériques associé aux anciens programmes de l'école primaire* (MEN, 2008).

Cependant, elle peut n'être que l'une des propriétés des nombres et des opérations utilisées. Ainsi en va-t-il de l'exemple suivant qui explicite symboliquement pour le professeur l'une des techniques envisagées pour calculer 48×250 :

– décomposition additive canonique de 250[8] :
$48 \times 250 = 48 \times 200 + 48 \times 50 = 48 \times 2 \times 100 + 48 \times 5 \times 10 = 96 \times 100 + 240 \times 10$
$48 \times 250 = 9\,600 + 2\,400 = 12\,000$

Figure 7 : Extrait du document *Le nombre au cycle 3, Apprentissages numériques* p. 38.

La première étape témoigne de l'utilisation de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition avec une décomposition implicite de 250 en $200+50$. Les égalités suivantes engagent l'associativité de la multiplication et diverses décompositions de nombres en produits de facteurs faisant apparaître des puissances de 10. L'effectuation des derniers produits par 10 ou par 100 repose alors sur des propriétés de l'écriture décimale de position. Ainsi, les éléments composant à la fois la technique de calcul et la technologie implicitement à l'œuvre peuvent être multiples, d'autant que l'on pourrait questionner les techniques pour calculer 48×2 (avec $48+48$ ou $40 \times 2+8 \times 2$?) et 48×5 ($48 \times 10 \div 2$ par exemple ?), qui selon les habiletés de chacun et par là le caractère éventuellement problématique de l'exécution pourraient s'exprimer dans la technique globale. Par ailleurs, le produit 48×250 pourrait être calculé en utilisant $48 \times 1000 \div 4$. Pour une même tâche, techniques et technologies peuvent varier et c'est l'un des objectifs du calcul mental en primaire : les comparaisons des techniques possibles et de leur domaine d'efficacité selon les nombres en jeu. Ainsi la distributivité peut-elle être enfouie dans le sens où de nombreux autres éléments composent les praxéologies de calcul mental afférentes.

On observe de plus une grande diversité potentielle dans les formes de savoirs mobilisées implicitement dans les manuels de primaire. Les exercices suivants engagent par exemple des décompositions du facteur tantôt écrit à gauche (premier exercice), tantôt écrit à droite (deuxième exercice).

1 Voici trois résultats : 3 x 254 = 762 7 x 254 = 1 778 9 x 254 = 2 286

Utilise ces résultats pour calculer :

a. 379 x 254 b. 793 x 254 c. 937 x 254 d. 709 x 254

2 a. Calcule : 519 x 8 519 x 3 519 x 4

b. Utilise ces résultats pour calculer :

519 x 48 519 x 38 519 x 34 519 x 483 519 x 834 519 x 348

Figure 8 : *Euromaths CM1 2009*, p. 65.

La distributivité est utilisée avec des sommes de deux termes ou de trois termes. Ainsi le calcul de 519×48 peut-il se faire en appui sur l'égalité $519\times(40+8)=(519\times40)+(519\times8)$, tandis que 379×254 repose sur l'égalité $(300+70+9)\times254=(300\times254)+(70\times254)+(9\times254)$ [4].

Certains manuels donnent la possibilité de se confronter à des décompositions non canoniques, c'est-à-dire qui ne correspondent par à une écriture additive du type « unités+dizaines+centaines » par exemple en lien avec la numération décimale :

4 37 x 63 = 2 331

Utilise ce résultat pour calculer chaque produit, sans poser d'opération.

a. 37 x 630 d. 37 x 64

b. 37 x 126 e. 370 x 63

c. 370 x 630 f. 37 x 73

Figure 9 : *Cap Maths CM2 2010*, p. 17.

Le calcul **f.** s'effectue en décomposant 73 sous la forme $63+10$ avant d'ajouter le produit 37×63 qui est donné à 37×10 que l'on peut calculer mentalement.

Dans le cas du calcul posé, le facteur décomposé est systématiquement celui qui est écrit « en bas » lorsqu'il comporte plus d'un chiffre, et la décomposition est nécessairement additive et liée à l'écriture canonique des nombres décimaux. Le calcul mental permet de rencontrer d'autres décompositions occasionnant des choix entre décompositions additives ou soustractives, avec deux ou plusieurs termes, du facteur écrit à gauche ou à droite.

Cette diversité nous amène à supposer une nécessaire adaptabilité dans l'utilisation de la distributivité comme connaissance préalable pour les enseignants, d'autant que les recherches de Butlen et Charles-Pézard (2007) montrent que du côté élève :

> *Les procédures mobilisées par des élèves de fin de cycle 2 n'ayant pas bénéficié d'un enseignement préalable sont les suivantes : l'algorithme « posé dans la tête » (procédure majoritaire), les différentes procédures mobilisant des décompositions canoniques et beaucoup plus rarement celles mobilisant d'autres décompositions additives ou soustractives. Ces dernières nécessitent un enseignement préalable (Butlen & Charles-Pézard, 2007 p. 9).*

[4] Notons que les calculs des produits partiels relèvent alors de l'associativité de la multiplication pour multiplier les produits donnés par l'énoncé par 10 ou 100 en appui sur la règle des zéros par exemple.

Pourtant, au moment de l'introduction de la distributivité comme savoir officiel au collège, la prise en compte de ces connaissances de primaire liées au calcul mental pose question au regard des techniques à l'œuvre. L'analyse des spécimens proposés par les manuels révèle la prégnance d'un facteur égal à 1 dans les produits partiels. Les produits donnés à effectuer sont par exemple des produits par 11, par 21, par 1001, ou par 19, c'est-à-dire par des nombres dont les décompositions sous forme de somme ou de différence conduisent à des écritures du type $a \pm 1$, où a est le produit d'un entier non nul par une puissance de 10 supérieure à 1. Dans ce cas, deux techniques paraissent possibles. Par exemple, pour effectuer 54×11 on peut envisager d'exécuter $(54 \times 10)+(54 \times 1)$ ou $(54 \times 10)+54$. La première technique mobilise implicitement la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, tandis que la seconde repose plutôt sur l'utilisation de l'addition itérée et de la définition de la multiplication sur les entiers avec un regroupement des dix premiers termes : $(54+54+54+54+54+54+54+54+54+54)+54$. Ces deux techniques ne sont pas sans lien, mais la première demande de penser et d'effectuer un produit par 1 supplémentaire par rapport au calcul reposant sur $(54 \times 10)+54$. Si ces choix peuvent s'expliquer par la simplicité du calcul engendré, ils ne motivent guère une généralisation nécessitant une réinterprétation de 54 du côté d'un produit s'ils ne sont pas accompagnés d'autres choix de multiplications. Ces produits induisant un facteur égal à 1 sont très majoritaires voire exclusifs au moment de l'introduction de la distributivité en 5^{e} (MEN, 2008), quelle que soit l'importance accordée aux tâches calculatoires dans les manuels (une grande variété existe de ce point de vue).

On observe également des ruptures possibles en 6^{e} quant aux occasions d'emploi de la distributivité offertes par les manuels par rapport au primaire[5]. Ainsi, le manuel *Phare* (2009) ne propose que quatre exercices dont les nombres en jeu pourraient y conduire parmi les 24 exercices consacrés à du calcul mental de produits dans le chapitre correspondant à la multiplication. Ils sont cependant précédés de l'exemple suivant : $23 \times 9=(23 \times 10)-23=230-23=207$. Cette technique repose davantage sur la définition d'un produit par addition itérée avec regroupement de termes, plutôt que sur l'utilisation de la distributivité par rapport à la soustraction. Ainsi la place occupée par la propriété de distributivité est-elle dans ce manuel extrêmement réduite, voire inexistante. Ce n'est pas le cas de tous les manuels. Par exemple, dans le manuel *Transmath 6^{e}* (2013), cinq exercices sur 19 montrent des occasions possibles avec des produits comme 35×12 à calculer mentalement dans le chapitre « Multiplications ». Toutefois, on n'observe aucune occasion de décomposition à une somme de trois termes, ou à une somme non canonique. Les deux manuels donnent à voir des savoirs à enseigner différents, en accord avec le caractère implicite de l'utilisation de la distributivité dans le sens où elle n'est pas encore un savoir officiel d'enseignement. On peut donc supposer que son existence et le nombre d'occasions d'emploi pour le calcul mental puissent s'avérer très différents d'une classe à l'autre, selon les pratiques enseignantes. La richesse potentielle qui apparaît dans certains manuels de primaire concernant les différents usages de la distributivité ne se retrouve ainsi pas dans les manuels de 6^{e} ou de 5^{e}. Ceci nous amène à envisager à la fois que cette diversité puisse être oubliée dans le cadre numérique, ou évanescente, et que la propriété ne prenne pas sa place technologique dans les praxéologies de calcul anciennes au regard des choix des nombres en jeu dans les manuels.

Plus généralement, nos analyses montrent que l'articulation de connaissances anciennes du primaire et des connaissances nouvelles autour de la distributivité se révèle être un enjeu d'enseignement faiblement exploré au collège ou présentant de multiples incomplétudes. Nous

[5] Étant donné la nouvelle rédaction des programmes incluant la 6^{e} au cycle 3, de nouvelles analyses de manuels récents seraient à conduire pour déterminer si de telles ruptures existent toujours.

faisons alors l'hypothèse que les praxéologies de calcul mental et de calcul posé, et au-delà de calcul dans les cadres numérique et algébrique convoquant cette propriété puissent ne pas être complétées ni réorganisées autour d'une technologie commune, autrement dit, que la distributivité ne joue pas son rôle de justification et de soutien aux techniques de calcul afférentes.

Ces constats nous ont amenée à questionner ces recompositions du point de vue de la formation des professeurs des écoles à un moment où un rapprochement entre les pratiques algébriques du collège (pour le concours du CRPE) et les pratiques numériques de primaire (calcul mental et posé de multiplication à enseigner) peut s'organiser. Pour cela, nous avons élaboré un questionnaire destiné à des étudiants de première année de master MEEF premier degré.

Le questionnaire

Ce questionnaire sur les connaissances didactiques à propos de l'enseignement de la multiplication et de la distributivité est structuré en trois parties. Une première partie « didactique » propose des analyses de tâches et d'extraits de manuels de CM2 relatifs à l'enseignement de la multiplication posée et au calcul mental de produits. Dans une deuxième partie, « mathématique », un certain nombre de multiplications sont données à effectuer mentalement, avant de demander une écriture en ligne de la technique de multiplication posée à partir d'un exemple. Une dernière partie « mathématique » est constituée d'expressions algébriques à développer ou à factoriser d'une part, et d'autre part d'égalités algébriques dont la véracité est à examiner. Notre propos n'étant pas d'évaluer les effets d'une formation, nous ne chercherons pas à analyser les contenus des enseignements reçus par ces étudiants. Il s'agit en effet au travers de ce questionnaire d'interroger les reconstructions ou les évolutions nécessaires entre savoirs mathématiques et savoirs didactiques pour enseigner la multiplication à l'école primaire. Peut-on et comment opérationnaliser les mathématiques du secondaire pour en faire des savoirs mathématiques pour enseigner ? Nous cherchons de plus à identifier de potentiels obstacles à l'articulation de ces différentes connaissances.

Avant de présenter les principaux résultats issus des analyses des productions recueillies, nous allons détailler les principales parties du questionnaire proposé, ainsi que les enjeux au regard de notre problématique.

La distributivité pour l'enseignement de la multiplication en primaire

La première partie du questionnaire propose tout d'abord de revenir sur deux techniques de calcul mental pour les produits 34×12 et 25×19 en CM2. Il s'agit de décrire une technique de calcul, puis de préciser les connaissances mathématiques sous-jacentes. Il est ensuite demandé d'envisager des explications en classe à la fois du point de vue d'un discours et de traces écrites au tableau. Les mêmes questions sont posées à propos des calculs **a.** et **c.** de l'extrait de manuel suivant :

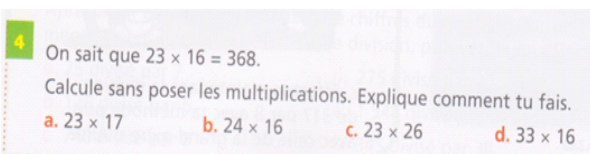
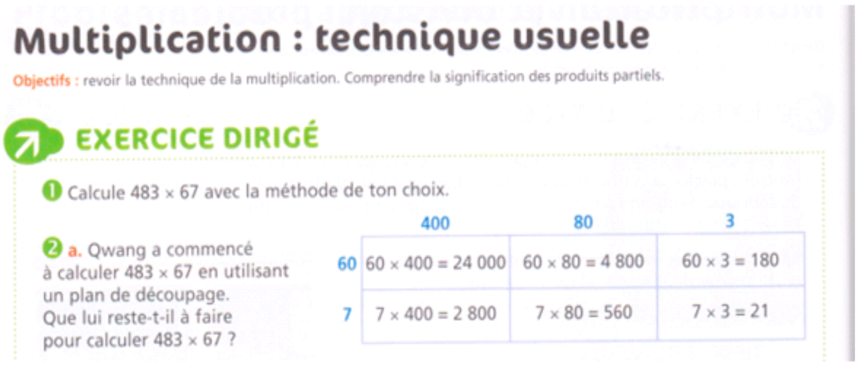

4 On sait que 23 × 16 = 368.
Calcule sans poser les multiplications. Explique comment tu fais.
a. 23 × 17 b. 24 × 16 c. 23 × 26 d. 33 × 16

Figure 10 : *EuroMaths CM2 2009*, p. 56.

Elles visent à déterminer si la distributivité est identifiée comme un savoir fonctionnant implicitement dans les techniques de calcul mental, et comment, en l'absence de formalisme disponible en CM2, elle peut se manifester au travers d'un discours envisagé pour la classe. Les spécimens choisis proposent à la fois des occasions d'utiliser la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et à la soustraction (avec éventuellement remplacement par l'addition itérée comme nous l'avons vu plus haut), ainsi qu'une décomposition non canonique pour le calcul de 23×26 à partir de 23×16 qui nécessite de considérer 26 comme $16+10$.

À la suite de ces questions, et afin de faire émerger la propriété et ses différentes formes, il est demandé de comparer les techniques envisagées et les connaissances sous-jacentes.

Enfin, à partir de l'extrait suivant, les étudiants sont invités à concevoir un discours pour la classe *« pour expliquer cette disposition de la multiplication de 483 par 67 sous forme de tableau »* :



Multiplication : technique usuelle

Objectifs : revoir la technique de la multiplication. Comprendre la signification des produits partiels.

EXERCICE DIRIGÉ

1 Calcule 483 × 67 avec la méthode de ton choix.

2 a. Qwang a commencé à calculer 483 × 67 en utilisant un plan de découpage. Que lui reste-t-il à faire pour calculer 483 × 67 ?

	400	80	3
60	60 × 400 = 24 000	60 × 80 = 4 800	60 × 3 = 180
7	7 × 400 = 2 800	7 × 80 = 560	7 × 3 = 21

Figure 11 : *EuroMaths CM2 2010*, p. 24.

Il s'agit ici d'observer des articulations possibles entre forme simple et double avec une somme de trois termes, ainsi que l'évocation de savoirs du côté de dénombrement ou d'aires potentiellement à même de soutenir les décompositions et les calculs liés à la distributivité.

La distributivité dans le cadre numérique

La deuxième partie du questionnaire consiste à déterminer la capacité à mobiliser la distributivité pour calculer mentalement :

1) On donne le produit suivant : 123 × 468 = 57 564.

Déterminez les résultats des calculs suivants uniquement si vous pouvez les trouver presque sans calcul, ou en effectuant mentalement des opérations rapides et simples, et en utilisant le résultat précédent. Vous pouvez écrire des opérations et/ou résultats intermédiaires si besoin.

468 × 123 =

123 × 46 800 =

12 300 123 × 468 =

1 023 × 468 =

123 × 1 468 =

Figure 12 : Première partie « mathématique » du questionnaire[6].

[6] Cet exercice est extrait du numéro hors série de *Petit x* (1999).

A partir d'un produit donné, il s'agit de calculer mentalement les résultats d'autres produits.

Le premier calcul s'appuie sur la commutativité de la multiplication $468\times123=123\times468$, et le second sur l'associativité $123\times(468\times100)=(123\times468)\times100$, 46 800 pouvant être écrit comme produit par 100 d'un des facteurs du produit donné.

Les trois derniers calculs que nous nommerons **C**, **D** et **E** reposent *a priori* sur une utilisation implicite de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ou à la soustraction (le choix de facteurs fortement liés par les chiffres aux facteurs du produit initial privilégient cette interprétation). Pour chaque produit proposé, il s'agit en amont de décomposer l'un des facteurs sous la forme d'une somme ou d'une différence dont l'un des termes soit 123 ou 468 ou un produit de ces nombres par une puissance de 10. Pour le calcul **C**, par exemple, la technique de calcul attendue peut s'écrire de la manière suivante :

$$(12\,300\,000+123)\times468=12\,300\,000\times468+123\times468=5\,756\,400\,000+57\,654=5\,756\,457\,564 .$$

La décomposition pour le calcul **D** est aussi celle du facteur écrit à gauche, mais le lien avec 123 paraît moins immédiat puisqu'il s'agit d'exhiber une somme algébrique de trois termes : $1\,023\times468=(1\,000\times123-100)\times468=1\,000\times468+123\times468-100\times468$, ce qui conduit à : $468\,000+57\,564-46\,800=421\,200+57\,564=478\,764$.

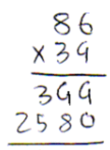
Le dernier produit demande de décomposer le facteur écrit à droite sous la forme $1000+468$, ce qui amène à une utilisation de la distributivité sous une forme plus proche de sa forme prototypique :

$$123\times1\,468=123\times(1000+468)=123\times1000+123\times468=123\,000+57\,564=180\,564 .$$

Aucune décomposition supplémentaire n'est alors nécessaire pour se ramener au produit initial, on peut donc supposer que ce calcul sera plus réussi que les autres.

Les choix de ces trois derniers produits permettent d'examiner la disponibilité de différentes formes de la distributivité (à gauche, à droite, avec diverses décompositions) dans les connaissances mathématiques des étudiants.

Dans un deuxième temps, il est demandé d'*« écrire une égalité en ligne qui montre quels calculs sont effectués pour calculer le produit, en posant la multiplication »* suivante :



Il est de plus précisé que *« cette égalité ne doit montrer ni le résultat ni les résultats des produits partiels mais bien les calculs intermédiaires effectués. »*. Le résultat a donc été effacé. Cette écriture en ligne est destinée à favoriser l'identification de la propriété de distributivité sous-jacente à la technique de multiplication posée que la question suivante demande d'expliciter : *« Cette égalité résulte-t-elle d'une propriété plus générale des nombres et des opérations que vous connaissez ? »*.

La distributivité dans le cadre algébrique

Enfin, la troisième partie du questionnaire propose de développer puis de factoriser un certain nombre d'expressions algébriques :

1) Développez les expressions suivantes :

$3 \times (x + 5) =$

$7x(3x + 4) =$

$(3x + 2)(5x + 4) =$

Factorisez les expressions suivantes :

$15x^2 + 35x =$

$(x - 2)(3x + 5) - 2x(x - 2) =$

Figure 13 : Deuxième partie « mathématique » du questionnaire[7].

Cette partie a pour but l'évaluation d'une certaine maîtrise du calcul algébrique reposant sur l'utilisation de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ou à la soustraction (pour la dernière expression), et ce, dans sa forme simple comme dans sa forme double (pour la troisième et la dernière expression). Notons que nous avons évité de choisir des coefficients négatifs afin de limiter l'impact d'erreurs de calcul sur les nombres relatifs ou de gestion de signes et ainsi de mieux observer les transformations d'écritures en appui sur la distributivité. Nous avons complété ces questions dans le cadre algébrique par les suivantes :

2) Quand l'égalité $a - (b + c) = a - b + a - c$ est-elle vraie ? Pourquoi ?

Toujours / Jamais / Parfois lorsque ….

3) Quand l'égalité $a \times (b \times c) = a \times b \times a \times c$ est-elle vraie ? Pourquoi ?

Toujours / Jamais / Parfois lorsque ….

Figure 14 : Deuxième partie du questionnaire.

Il s'agit ici d'examiner de « fausses distributivités » : celle de la soustraction par rapport à l'addition et celle de la multiplication par rapport à elle-même. Ces questions visent à caractériser une certaine compréhension de la propriété de distributivité et des écritures algébriques.

Une double interprétation de l'égalité est d'emblée suggérée : tout d'abord comme identité (avec « toujours »), puis comme une équation[8] avec « parfois lorsque... ». Attribuer des valeurs aux variables permet rapidement de trouver un contre-exemple et de conclure dans les deux cas que l'égalité n'est pas « toujours » vraie. Par exemple pour la première égalité, les nombres 5, 0 et 2 donnent : $5-(0+2)=3$ et $5-0+5-2=8$.

Il se peut cependant que pour certaines valeurs, l'égalité soit vraie. Traiter l'égalité comme une équation permettant de déterminer ces valeurs donne les égalités suivantes :

$a=a-b+a-c+(b+c)$, puis $a=2a$, ce qui donne $a=0$.

Lorsque *a* est égal à 0, l'égalité est vraie. C'est le seul cas. La question « Pourquoi ? » peut être examinée en raisonnant sur le sens des écritures : à gauche, il s'agit de soustraire à un nombre *a* une somme $(b+c)$. Or soustraire une somme est équivalent à soustraire chacun de ses termes, autrement dit, $a-(b+c)=a-b-c$. À droite, on ajoute *a* à cette expression. Pour que cet ajout

[7] Ces questions sont inspirées du questionnaire proposé dans Mok (2010).

[8] Ou plus véritablement comme une identité paramétrée, c'est-à-dire que chaque lettre représente un nombre généralisé, et chaque nombre généralisé peut être fixé pour ensuite regarder l'identité pour toute valeur des autres.

ne modifie pas la somme, il faut donc que *a* soit égal à 0.

De même l'égalité $a\times(b\times c)=a\times b\times a\times c$ n'est pas toujours vraie, un contre-exemple suffit à le montrer : pour les nombres 5, 1 et 2, on obtient $5\times(1\times 2)=10$ et $5\times 1\times 5\times 2=50$.

Les questions posées visent à déterminer les fondements des arguments utilisés par les étudiants pour examiner la véracité d'une égalité : utilisent-ils des valeurs, interprètent-ils ainsi l'égalité comme des écritures générales de calcul donnant le même résultat pour toutes valeurs attribuées ? Ou bien l'interprétation se situe-t-elle davantage du côté de manipulations des écritures, avec éventuellement une extension incontrôlée de la propriété de distributivité à des opérations pour lesquelles elle s'avère fausse ?

Le choix de proposer un questionnaire séparé en trois parties, données à traiter indépendamment (avec un relevé des productions à la fin de chaque partie), a été dicté par le souci de ne pas influencer les reconnaissances de l'usage de la propriété et des liens potentiels par l'ordre des questions proposées. La partie algébrique a donc été la dernière.

Nous allons maintenant aborder les principaux résultats issus des réponses des 19 étudiants à qui nous avons soumis ce questionnaire. Nous allons les décrire dans l'ordre inverse de l'ordre des parties proposées, car notre point de départ se situe du côté des savoirs mathématiques (des étudiants) attenants à la distributivité, avant de chercher à déterminer comment ils peuvent soutenir l'enseignement de la multiplication à l'école primaire et se constituer comme savoirs pour cet enseignement.

Analyse des productions d'étudiants : connaissances mathématiques et didactiques et construction d'un discours pour la classe

L'articulation entre numérique et algébrique

Calcul algébrique et calcul numérique

Les réponses des étudiants à la troisième partie du questionnaire présentées dans la figure suivante montrent une certaine maîtrise du calcul algébrique :

Développement			**Factorisation**	
$F=3\times(x+5)$	$G=7x\times(3x+4)$	$H=(3x+2)(5x+4)$	$I=15x^2+35x$	$J=(x-2)(3x+5)-2x(x-2)$
19/19	16/19	16/19	16/19	12/19

Figure 15 : Taux de réussite dans l'utilisation de la distributivit pour développer ou factoriser des expressions algébriques.

La distributivité de la multiplication par rapport à l'addition sous sa forme simple comme sous sa forme double semble très majoritairement employée sans difficulté, à la fois pour développer, réduire et pour factoriser les expressions algébriques proposées. Les erreurs observées dans les développements des expressions *G* et *H* relèvent davantage de réductions de produits comme par exemple *7x* multiplié par *3x* qui donne *21x*, que de l'utilisation de la distributivité à proprement parler. Pour ce qui est de l'expression *J*, trois étudiants ne l'ont pas abordée, et l'un a développé au lieu de factoriser. La baisse du taux de réussite s'explique sans doute par la reconnaissance d'un facteur commun qui est à opérer en amont de l'emploi de la propriété de distributivité d'autant que sa place (à gauche puis à droite dans l'écriture des produits) n'est pas, dans l'écriture proposée, conforme aux positions prototypiques des expressions usuellement rencontrées.

Observons maintenant les productions des étudiants en ce qui concerne les calculs numériques :

Expressions	A commutativité	B associativité	C distributivité à droite	D distributivité / somme algébrique	E distributivité à gauche
Taux de réussite	17/19	15/19	9/19	1/19	13/19

Figure 16 : Taux de réussite pour les calculs numériques.

La grande majorité des productions montre une bonne utilisation de la commutativité et de l'associativité, qu'elle soit explicitée ou implicite, pour calculer mentalement les produits A et B. Plus des deux tiers des étudiants emploient au moins une fois correctement la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

Le taux de réussite au calcul D est cependant très faible : seul un étudiant aborde ce calcul. Le fait que le facteur à décomposer soit celui écrit à gauche ne semble pas être un élément d'influence étant donné que c'est également le cas pour le calcul C, bien mieux réussi[9]. Observons donc la décomposition à effectuer : il s'agit d'écrire 1 023 sous la forme $1\,000+123-100$. Le lien avec 123 est moins évident puisque d'une part la décomposition ne correspond pas à l'écriture canonique des nombres décimaux, et les chiffres ne sont pas juxtaposés dans l'écriture de 1 023 comme dans les autres facteurs du C et du E. De plus, il s'agit d'une somme algébrique de trois termes, faisant intervenir une addition et une soustraction. La décomposition semble donc *a priori* plus délicate à exhiber, et les étudiants qui ne l'abordent pas ne semblent pas considérer ce calcul comme possible à partir du produit donné, d'autant que la consigne évoque cette éventualité.

Le calcul $C=12\,300\,123\times468$ est également moins réussi que $E=123\times1\,468$. On peut s'interroger sur les raisons de ce résultats à partir des productions de Norah et Gaëtan qui écrivent la même somme : « $57\,56400+57\,564=5813964$ ». Ils ne semblent pas avoir véritablement décomposé 12 300 123 sous la forme d'une somme mais plutôt envisagé le nombre à partir de la concaténation de deux nombres 12 300 et 123, sans tenir compte du fait que 12 300 est un nombre de milliers. Cette juxtaposition conduit à multiplier 57 564 par 100 au lieu de 100 000. L'addition est pourtant implicitement présente puisque les produits partiels sont bien ajoutés pour obtenir le résultat. Mais l'écriture du nombre en lien avec les chiffres 1, 2 et 3 semble faire perdre le lien avec la numération décimale de position et la nécessité de convertir en unités pour pouvoir ajouter. Ce n'est pas le cas toutefois pour la copie suivante qui montre une bonne recomposition du nombre à partir de produits partiels effectués selon le même principe :

[9] Ceci est toutefois à nuancer pour une étudiante qui semble refuser de décomposer à gauche, et s'affranchit de la consigne pour écrire la distributivité avec décomposition du facteur de droite et effectuer tous les produits partiels mentalement sans utiliser le produit donné par l'énoncé.

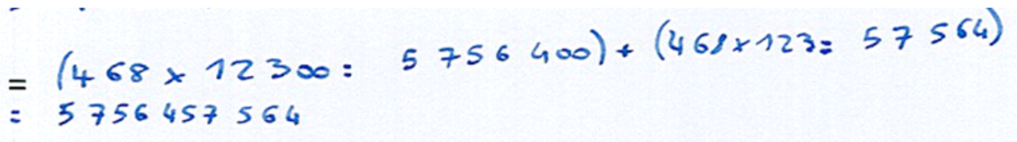


Figure 17 : Extrait de la copie de Clémence.

Clémence tient compte du fait que son premier calcul donne un nombre de milliers au moment de la concaténation et son résultat est juste. Cependant, les écritures intermédiaires pour éclairer le calcul effectué mentalement sont erronées, en particulier à cause des unités de numération qui ne sont pas écrites.

Ces exemples témoignent d'une difficulté à réinterpréter des manipulations des écritures en lien avec des éléments technologiques apparentés à la numération décimale de position sous la forme d'opération portant sur des nombres. La juxtaposition a bien un lien avec l'addition, mais elle ne se « traduit » pas directement par l'écriture d'une addition en raison des unités de numération et des conversions nécessaires pour les écritures.

La mise en regard des taux de réussite bien moindres pour le calcul numérique que pour le calcul algébrique dans le sens du développement amène à penser que l'articulation entre les savoir-faire dans les deux cadres numériques et algébriques peut ne pas aller de soi. On peut faire l'hypothèse que l'une des difficultés qui n'existe pas dans le cadre algébrique réside dans la décomposition à produire : les sommes sont en effet explicites et les termes apparents dans les expressions littérales, tandis qu'elles sont à chercher pour le calcul numérique. Cette recherche relève aussi de choix à opérer en fonction des nombres de l'expression numérique et des connaissances dont on dispose, ou des contraintes portées par l'énoncé comme dans l'exercice proposé ici. L'on peut en effet choisir de décomposer le facteur de gauche ou celui de droite, sous la forme d'une somme, ou d'une différence, voire d'une somme algébrique avec plus de deux termes. La décomposition peut aussi correspondre, ou non, à la décomposition canonique des nombres décimaux. Ce travail en amont est donc un travail supplémentaire par rapport à ce qu'il y a à faire dans le cadre algébrique.

Une autre source de difficulté relative à ces décompositions réside dans les spécificités de la numération décimale de position. Les manipulations des écritures à partir de concaténations de chiffres en lien avec les unités de numération peuvent alors faire obstacle à la reconstruction des programmes de calcul sous-jacent portant sur les nombres en jeux :

> *Quand on regarde juste l'écriture d'un nombre (en chiffres) on ne voit pas apparaître cette notion de groupements successifs par 10 : les différentes unités, ainsi que leurs liens, sont invisibles dans cette écriture (Tempier, 2010, p. 62).*

Cette difficulté à recomposer dans la dimension mathématique les savoirs liés aux manipulations des écritures est plus présente pour le calcul posé. C'est ce que nous allons voir maintenant.

Description mathématique de techniques de calcul posé

L'énoncé demandait d'écrire une égalité en ligne montrant les calculs intermédiaires effectués en posant la multiplication de 86 par 34, l'opération posée étant donnée sans résultat comme nous l'avons vu plus haut.

Treize étudiants (13/19) ont abordé la question. Sept d'entre eux proposent des écritures montrant une bonne identification des produits partiels comme $86\times34=(86\times4)+(86\times30)$ ou $86\times34=((6\times4)+(80\times4))+((30\times6)+(30\times80))$. Ces écritures correspondent à une utilisation implicite de la simple et double distributivité comme nous avons pu l'observer dans les manuels de primaire.

Les différents écrits de Clémence, dont nous avons observé précédemment le calcul mental du produit $12\,300\,123 \times 468$, témoignent de connaissances à la fois potentiellement riches et instables. Elle parvient ici à écrire en ligne des calculs intermédiaires correspondant à la multiplication posée. A la question suivante, elle identifie bien la technologie à l'œuvre en mentionnant *« la propriété de distributivité »*, ce qui n'est le cas que pour 2 étudiants sur 19. Elle échoue pourtant à produire une écriture syntaxiquement correcte pour le calcul *C* comme nous l'avons vu plus haut.

Les six autres copies (6/13) montrent que l'utilisation de l'algorithme de multiplication posée en appui sur les chiffres peut également faire obstacle à la description et à l'identification des produits partiels. Les écritures produites sont fondées par une description « chiffre par chiffre », sans tenir compte des nombres sous-jacents, de sorte que les enchaînements d'opérations sont erronés comme en témoignent les extraits de copie suivants :

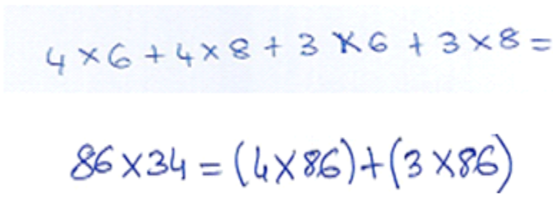


Figure 18 : Extraits de copie d'étudiant montrant des écritures erronées.

La copie de Maureen pose question quant à l'interprétation qu'elle fait des écritures des calculs :

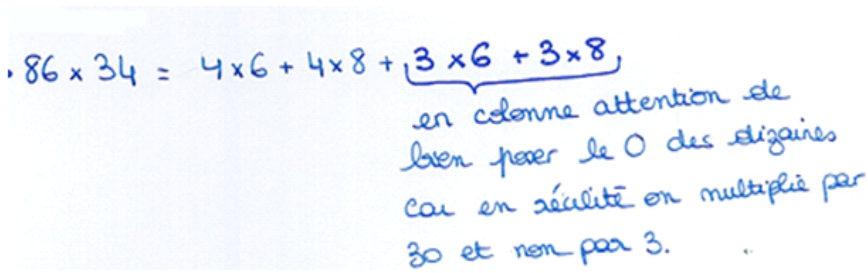


Figure 19 : Extrait de la copie de Maureen.

Elle sait qu'on multiplie par 30, mais écrit 3, et donc une égalité fausse qu'elle explicite par son commentaire, le signe « = » n'étant pas alors employé comme relation d'équivalence. Dans son discours, l'écriture du zéro semble pourtant bien associée à la multiplication par 3 dizaines, qu'elle réinterprète comme 30 unités, mais cela n'apparaît pas dans l'écriture en ligne du programme de calcul sous-jacent. Les écritures des produits semblent être davantage une tentative de traduction de l'algorithme de calcul posé de ce que l'on fait avec les chiffres en conjuguant par l'écriture d'additions, à la fois des juxtapositions syntaxiques de chiffres et des additions de nombres[10]. Ce qui semble faire obstacle ici se situe du côté d'une articulation entre connaissances sur les écritures et connaissances mathématiques. Nous allons maintenant

[10] Mais le jeu sur les écritures des chiffres de droite à gauche qui permettent alors de tenir compte de leur valeur n'est pas véritablement descriptible en termes de programme de calcul, il n'y a pas à proprement parler d'opérations qui traduise de façon satisfaisante cette manipulation consistant à concaténer les écritures (Constantin, 2014).

observer les productions d'égalités de ce point de vue.

Egalités numériques, égalités algébriques

Si l'étudiante renommée Maureen ne semble pas contrôler ses écritures par l'exécution, ce n'est pas le cas de Katya par exemple, qui amorce une vérification en écrivant « $4\times6=24$ » puis « $4\times8=32$ ». Les calculs suivants ont été effacés, mais l'on devine par transparence qu'elle a écrit : « $24+32(24+30+2)=56$ ». Ce résultat ne correspond pas au nombre 344 écrit à la première ligne de la multiplication posée. Elle arrête alors son travail sans pouvoir envisager la description de ses calculs en lien avec les nombres plutôt que les chiffres pour retrouver le résultat espéré. Cette réinterprétation de la description de l'algorithme du côté des nombres ne semble donc pas aller de soi. Elle pose de réelles difficultés à ces 7 étudiants, y compris pour ceux qui, comme Katya, peuvent bel et bien interpréter les égalités comme relation d'équivalence, en partie à tout le moins, avec l'idée que les calculs écrits de part et d'autre du signe « = » doivent renvoyer le même nombre une fois exécutés (même si, dans le cas précédent, c'est bien un nombre qu'elle cherche et non l'égalité complète comme pour d'autres).

Or cette interprétation de l'égalité n'affleure que peu dans les productions des étudiants dans le cadre algébrique. Deux copies seulement montrent des essais numériques, sans qu'ils soient utilisés pourtant pour conclure.

Cinq étudiants, sur les 16 qui ont abordé les questions, répondent au moins une fois « toujours » avec extension incontrôlée de la distributivité en appui sur des arguments syntaxiques :

$$a-(b+c)=(a-b)+(a-c)$$

Figure 20 : Extension erronée de la distributivité à la soustraction.

On peut donc supposer que le sens construit pour l'égalité n'incorpore pas l'idée d'équivalence et se fonde plutôt sur l'existence d'une transformation d'écriture. Celle-ci semble très liée aux aspects formels de l'expression, sans rapport avec les propriétés des opérations, ou sans contrôles opérés avec des valeurs.

Sept étudiants (7/19) répondent correctement au moins à l'une des deux questions de l'égalité comme en témoigne le brouillon suivant :

$$a-(b+c)=a-b+a-c$$
$$a-(b+c)=a-b-c \;/\; a-b+a-c=2a-b-c$$
$$a-\cancel{b}\cancel{c}=2a-\cancel{b}-\cancel{c}$$
$$a=2a$$
$$2a-a=0$$
$$a=0$$

Figure 21 : Extrait d'une copie d'étudiant à propos de la véracité d'une égalité algébrique.

Le fait que ces considérations suffisent pour conclure ne permet pas de dire que le lien avec les valeurs numériques serait absent pour ces étudiants.

Les difficultés observées montrent que les rapports entre calcul mental et calcul posé peuvent ne pas s'être construits et pourraient résister au moment d'une occasion de reconstruction, y compris pour des étudiants qui peuvent par ailleurs très bien utiliser la distributivité pour du calcul mental, ou du calcul algébrique. Les pratiques dans les domaines numériques et algébriques peuvent vivre de façon cloisonnée. Ainsi Maureen réussit-elle l'ensemble des calculs algébriques proposés : elle calcule mentalement les produits C et E sans difficulté et évoque la propriété de distributivité. Elle ne parvient pourtant pas à produire une écriture valide pour décrire le calcul posé de la multiplication. Le lien entre calcul mental et calcul posé semble incomplet, et des obstacles liés à la numération décimale de position émergent.

Ces constats corroborent les résultats d'une étude conduite par Mok (2010) à Hong Kong auprès d'élèves de 12 à 15 ans à propos de la distributivité. Elle constate combien l'application numérique de la propriété peut ne pas être liée pour ces élèves aux pratiques de développement ou de factorisation. Les entretiens d'explicitation qu'elle mène montrent que l'application correcte de la distributivité n'implique pas une meilleure compréhension de la propriété. L'un des obstacles à lever pour y accéder réside dans la signification à attribuer au signe « = » comme relation d'équivalence en lien avec la désignation de propriétés arithmétiques d'opérations comme la commutativité de l'addition qui serait traduite par $a+b=b+a$.

En outre, seuls trois étudiants identifient la distributivité comme étant une propriété sous-jacente à leurs techniques de calcul mental comme à celle du calcul posé. Dès lors se pose la question de la construction d'un discours pour la classe, et en lien des analyses des praxéologies mettant *a priori* en jeu la propriété de distributivité. C'est ce que nous allons aborder maintenant.

Analyses des savoirs à enseigner sur la multiplication au regard de la distributivité

Description des techniques

De bonnes descriptions des techniques de calcul mental apparaissent dans les 19 copies recueillies, et à l'exception de l'une d'entre elles, les analyses mettent bien en avant la décomposition d'un facteur à opérer en amont. Justine explique par exemple que *« pour calculer mentalement 34×12 en CM2, il faut décomposer 12 en $10+2$ puis multiplier 34 par 10 puis 34 par 2 et ajouter ensuite les deux résultats »*. Trois étudiants proposent également diverses possibilités de calcul, à l'instar de l'extrait suivant :

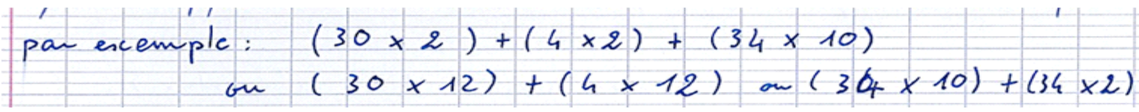

par exemple : (30 × 2) + (4 × 2) + (34 × 10)
ou (30 × 12) + (4 × 12) ou (34 × 10) + (34 × 2)

Figure 22 : Extrait d'une copie d'étudiant abordant diverses techniques possibles.

Différentes techniques peuvent être envisagées pour une même tâche, avec une utilisation implicite de la distributivité à gauche ou à droite. Ceci amène à interroger les éléments qui peuvent permettre de justifier ces choix.

Adaptabilité selon les nombres en jeu

Considérant les analyses proposées qui évoquent cette question du choix de la décomposition dans la technique de calcul, deux motivations apparaissent. Il s'agit d'une part de la contrainte de l'énoncé : *« Pour le c), on attend que l'élève décompose 26 en faisant le lien avec 16 soit $26=16+10$ »* indique ainsi un étudiant. Il s'agit d'autre part des calculs induits qui peuvent se révéler plus ou moins simples. Une étudiante explique par exemple qu'*« il faut faire réaliser aux enfants diverses multiplications mettant en jeu cette règle [la règle de distributivité] et ainsi leur faire comprendre qu'il est plus aisé de faire* $23\times(16+10)$ *que* $23\times(14+12)$ *»*.

Cette étudiante compare les décompositions de 26 en $16+10$ et en $14+12$, et évoque les conséquences sur les calculs à effectuer, la première permettant une multiplication par 10 plus aisée. Bien que le lien avec l'énoncé nécessaire ne soit pas identifié (le résultat de la multiplication de 23 par 16 est donné), c'est bien cette idée de comparaison des coûts des techniques de calcul engendrées par ces choix qu'elle développe pour l'ensemble des calculs proposés :

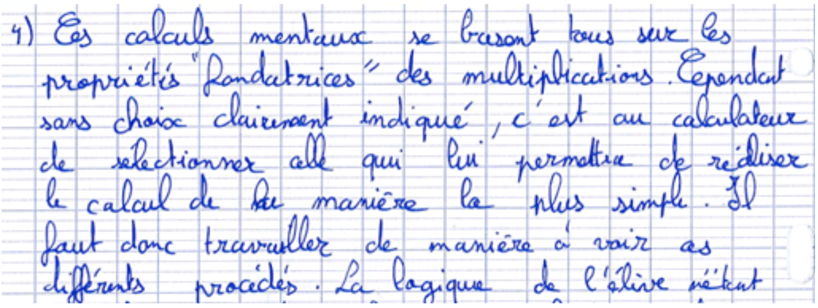

4) Ces calculs mentaux se basent tous sur les propriétés "fondatrices" des multiplications. Cependant sans choix clairement indiqué, c'est au calculateur de sélectionner celle qui lui permettra de réaliser le calcul de la manière la plus simple. Il faut donc travailler de manière à voir ces différents procédés. La logique de l'élève n'étant

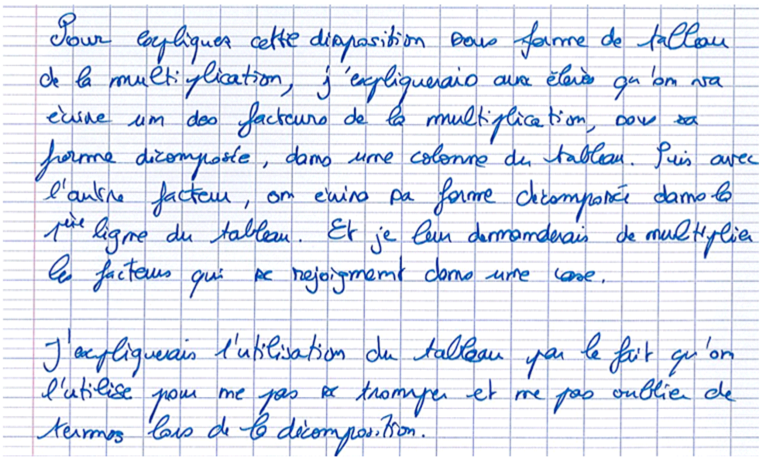
Figure 23 : Extrait d'une copie d'étudiant.

Cette mise en avant des aspects liés à la numération décimale et aux produits facilités se retrouve dans d'autres copies à propos du calcul mental : *« le procédé expliqué fait appel à des multiples de 10, ce qui est le plus simple à calculer puisqu'il suffit de rajouter un zéro au nombre »* indique par exemple un étudiant.

Justification des techniques

Les connaissances identifiées sont très majoritairement liées à la connaissance des tables de multiplication, des décompositions additives, des règles de multiplication par 10, ou par un multiple de 10 en appui sur la numération décimale de position.

On retrouve les mêmes types d'arguments pour analyser l'extrait de manuel présentant une multiplication à partir d'un tableau en amont du travail sur la multiplication posée :


Pour expliquer cette disposition sous forme de tableau de la multiplication, j'expliquerais aux élèves qu'on va écrire un des facteurs de la multiplication, sous sa forme décomposée, dans une colonne du tableau. Puis avec l'autre facteur, on écrira sa forme décomposée dans la 1ère ligne du tableau. Et je leur demanderais de multiplier les facteurs qui se rejoignent dans une case.

J'expliquerais l'utilisation du tableau par le fait qu'on l'utilise pour ne pas se tromper et ne pas oublier de termes lors de la décomposition.

Figure 24 : Extrait d'une copie d'étudiant.

On observe ici des arguments liés à l'exécution de chaque produit partiel sans « oubli », de même qu'apparaissent des éléments associés à la position des chiffres liés à leur valeur dans les écritures de nombre qui préparent peut-être le travail dans la multiplication posée :

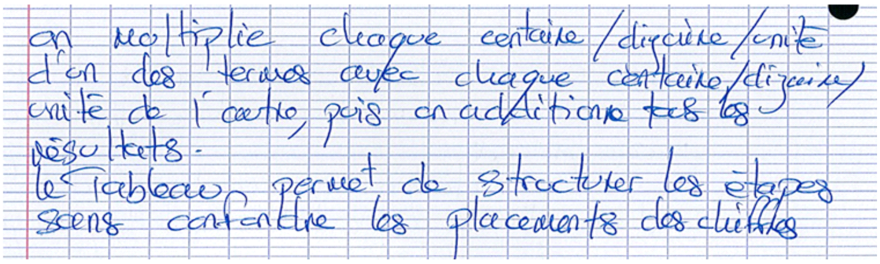

on multiplie chaque centaine/dizaine/unité d'un des termes avec chaque centaine/dizaine/unité de l'autre, puis on additionne tous les résultats.
le tableau permet de structurer les étapes sans confondre les placements des chiffres

Figure 25 : Extrait de la copie de Guillaume.

Quant au calcul mental, la distributivité implicitement utilisée est évoquée par trois étudiants (3/19). Parmi les autres, cinq étudiants (5/16) mentionnent un lien entre multiplication et addition sans véritablement expliciter, et une étudiante évoque l'addition itérée. Mais elle ne la considère que pour les élèves en difficulté car, dit-elle, *« on la réserve généralement plus pour les CE1 »*.

Si les décompositions des nombres et les choix qui les guident en lien avec les propriétés de la numération décimale de position apparaissent bien dans les discours observés, l'identification de la propriété de distributivité comme savoir sous-jacent est pourtant peu présente. Aucune copie ne propose de faire le lien avec un rectangle dont on chercherait à déterminer une aire, ou un nombre de carreaux que l'on chercherait à dénombrer à partir de la présentation sous forme de tableau. La disposition et les produits partiels ne paraissent pas suffisants pour en identifier les enjeux. Ces constats font écho aux résultats de Clivaz (2011) à propos des connaissances mathématiques pour l'enseignement de la multiplication d'enseignants vaudois. Cette connaissance paraît pourtant nécessaire au regard de ce que l'auteur observe en son absence :

> *La Connaissance Mathématique Spécifique de la multiplication en tableau est purement procédurale, le tableau n'est pas vu comme un produit cartésien, mais comme un endroit où l'on range des produits à additionner ensuite en ligne. Ce manque de compréhension du fondement de la multiplication en tableau va l'empêcher de l'utiliser avec pertinence pour interagir sur les aspects mathématiques de la multiplication en colonnes […] (Clivaz, 2011, p. 258).*

Certains avancent l'idée d'un lien entre addition et multiplication, bien que ce lien ne soit pas tout à fait abouti, nous allons y revenir. Mais le fait que la propriété de distributivité ne soit pas un objet d'enseignement explicite à ce niveau soulève la question de la construction d'un discours satisfaisant, c'est-à-dire d'un discours qui en éclaire les usages, ainsi que des traces écrites afférentes alors que la propriété ne sera formalisée que plus tard. Observons les productions des étudiants de ce point de vue.

Des formats d'écriture différents entre algébrique et numérique et des difficultés à construire des traces écrites en lien avec les discours

Les parenthèses et la priorité de la multiplication par rapport à l'addition

Pour la partie didactique du questionnaire, les productions montrent que 10 étudiants sur 19 envisagent pour leur trace écrite au tableau au moins une écriture utilisant la priorité de la multiplication par rapport à l'addition, c'est-à-dire sans les parenthèses autour des produits prioritaires, à l'instar de l'extrait suivant :

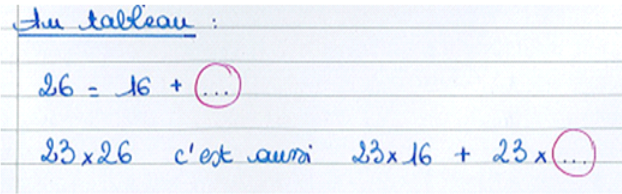

Au tableau :
26 = 16 + ...
23 x 26 c'est aussi 23 x 16 + 23 x ...

Figure 26 : Extrait d'une copie d'étudiant.

Ce savoir relatif aux propriétés des écritures d'enchaînement d'opérations est un savoir mathématique usuel pour le concours, mais il émerge dans les écrits que les étudiants envisagent pour la classe sans être reconnu comme non disponible ou comme savoir à enseigner au secondaire. Les neuf autres étudiants (9/19) proposent des écrits plus conformes aux savoirs à enseigner à ce niveau, mêlant discours, calculs et résultats intermédiaires, ou une écriture parenthésée de l'enchaînement des calculs comme le montrent les productions suivantes :

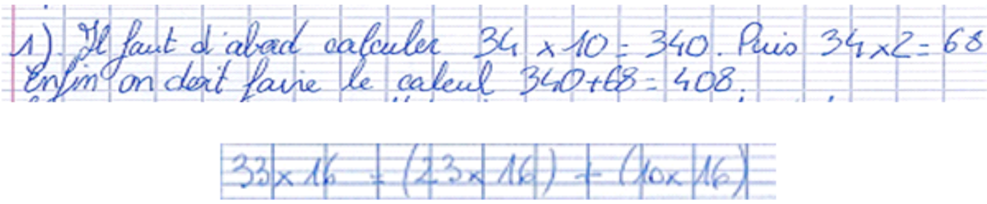

1) Il faut d'abord calculer 34 x 10 = 340. Puis 34 x 2 = 68
Enfin on doit faire le calcul 340 + 68 = 408.
33 x 16 = (23 x 16) + (10 x 16)

Figure 27 : Extrait de copies d'étudiants montrant écritures parenthésées ou calculs intermédiaires.

Difficulté à articuler discours et écritures autour de la décomposition

De la même manière que pour le calcul mental de la partie mathématique du questionnaire, des difficultés liées à la numération décimale de position émergent au moment de l'écriture des calculs. On retrouve dans la partie didactique des traces écrites qui rendent compte d'une difficulté à articuler le discours sur les décompositions (12 est décomposé en 1 dizaine et 2 unités) avec les écritures et les résultats :

Cette étudiante parle d'un décalage qui réfère à une conversion nécessaire car la multiplication par 34 correspond à un nombre de dizaines, mais les unités de numération n'apparaissent pas ici, et l'insistance est donnée sur les manipulations des écritures (un décalage) sans lien avec des éléments technologiques.

Cinq copies sur 19 proposent de marquer des décompositions à l'aide de flèches ou d'encadrement colorés en important des ostensifs liés à la pratique du calcul algébrique.

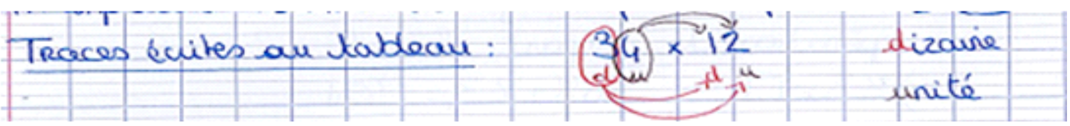


Figure 29 : Extrait d'une copie d'étudiant.

Mais c'est alors une interprétation sous-jacente de la technique comme résultante d'une transformation des écritures qui apparaît (à l'instar d'un développement dans le cadre algébrique) et dont on peut se demander dans quelle mesure elle peut être pertinente à un niveau d'enseignement ou de telles manipulations n'ont jamais été rencontrées[11]. La justification de la technique du point de vue mathématique pose également question. Pourtant, deux étudiantes tentent de construire un lien en avançant des explications fondées sur la définition de la multiplication par addition itérée de façon plus ou moins explicite. Ce lien émerge à l'occasion du calcul de 23×17 à partir du résultat de 23×16 :

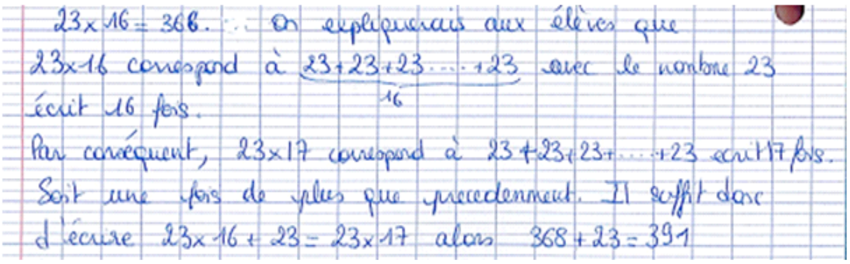

23x16 = 368. On expliquerais aux élèves que
23x16 correspond à $\underbrace{23+23+23\ldots+23}_{16}$ avec le nombre 23
écrit 16 fois.
Par conséquent, 23x17 correspond à 23+23+23+.....+23 écrit 17 fois.
Soit une fois de plus que precedemment. Il suffit donc
d'écrire 23x16 + 23 = 23x17 alors 368 + 23 = 391

Figure 30 : Extrait d'une copie d'étudiant s'appuyant sur l'addition itérée.

Observons maintenant une tentative d'oralisation proposée par une autre étudiante :

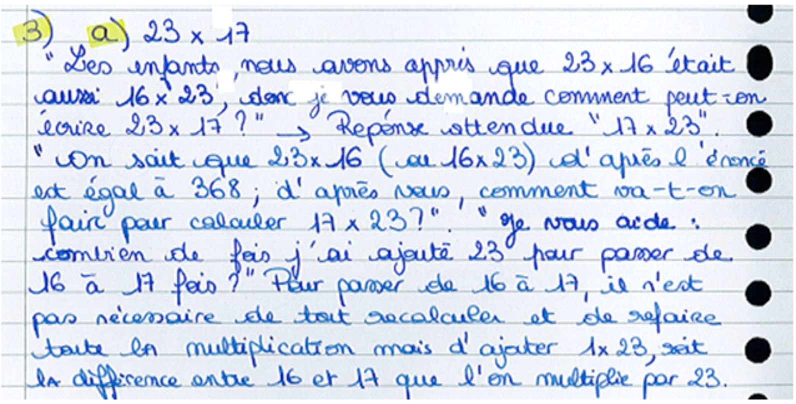

3) a) 23 x 17
"Les enfants, nous avons appris que 23 x 16 était
aussi 16 x 23, donc je vous demande comment peut-on
écrire 23 x 17 ?" → Réponse attendue "17 x 23".
"On sait que 23x16 (ou 16x23) d'après l'énoncé
est égal à 368 ; d'après vous, comment va-t-on
faire pour calculer 17 x 23 ?". "Je vous aide :
combien de fois j'ai ajouté 23 pour passer de
16 à 17 fois ?" Pour passer de 16 à 17, il n'est
pas nécessaire de tout recalculer et de refaire
toute la multiplication mais d'ajouter 1x 23, soit
la différence entre 16 et 17 que l'on multiplie par 23.

Figure 31 : Extrait d'une copie d'étudiant.

Cette étudiante se heurte au fait que 23×17 et 17×23 ne renvoient pas à la même somme. De ce point de vue, 23×17 se lit 17 fois 23 ou 23 multiplié par 17, et correspond à une somme de 17 termes tous égaux à 23. Le fait que 23 fois 17 donne le même résultat est associé à la commutativité de la multiplication et explique que l'on puisse lire comme cela se fait dans l'usage , « 23 fois 17 ». Or, cette étudiante ne connaît manifestement pas le sens de l'écriture associé à la somme, de sorte qu'elle est obligée de passer par le changement de l'ordre d'écriture des facteurs pour pouvoir soutenir son discours. Notons de plus qu'au lieu d'ajouter 23, elle propose d'ajouter une fois 23. Or ce « 1 » ne devrait pas apparaître dans la somme, il ne fait que dénombrer les termes. Ajouter 23 ou 23×1 change quelque peu le savoir sous-jacent comme nous l'avons vu dans la première partie de cet article.

Les productions des étudiants en cours de formation font très normalement apparaître un certain nombre de difficultés pour élaborer des traces écrites pour la classe associées à un discours qui sous-tende les techniques de calcul. Leurs analyses montrent que ces difficultés sont d'une part issues de formats d'écritures utilisés pour le concours, et liés aux connaissances de règles

[11] La recherche que nous avons conduite (Constantin, 2014) montre combien cette interprétation est nouvelle en 5e et pose difficulté aux élèves.

d'écriture (priorité de la multiplication par rapport à l'addition) ou de la distributivité dans le cadre algébrique (avec une interprétation en termes de transformations d'écriture) qui interfèrent avec des traces écrites envisageables pour les élèves. Elles sont d'autre part issues d'éléments technologiques à considérer. Les éléments apparentés à la numération décimale de position (décompositions du point de vue syntaxique d'un nombre à partir de ses chiffres, et « décalage ») peuvent faire obstacle pour articuler un discours sur les chiffres et des écritures portant sur des nombres. Lorsque l'addition itérée est envisagée pour soutenir un discours fondé sur les propriétés des opérations, on peut observer des difficultés à faire le lien avec le discours oral liées à une méconnaissance du sens des écritures et le rôle dissymétrique des facteurs (multiplicande et multiplicateur). Ce choix pose de plus la question d'une extension future au cas des nombres décimaux.

Conclusion

Le questionnaire que nous avons élaboré renseigne sur des conditions et des obstacles potentiels pour qu'émergent ou se reconstruisent des connaissances mathématiques et didactiques liées à la distributivité que nous supposons nécessaires ou utiles pour l'enseignement de la multiplication.

Il s'agit tout d'abord du rôle de cette propriété pour soutenir et justifier les techniques de calcul posé et de calcul mental de multiplications, et des différentes formes de ce savoir. Car les analyses de manuels de primaire montrent que la distributivité peut être simple ou double, à gauche ou à droite, avec des sommes de deux, trois ou quatre termes, et des décompositions canoniques ou non. Mais les étudiants interrogés ne décèlent que peu la propriété comme étant sous-jacente au calcul posé même après la production d'une écriture en ligne la montrant partiellement. Ceci fait écho à l'absence de prise en compte des connaissances anciennes observée dans les manuels de collège. L'articulation entre distributivité simple et distributivité double ne va également pas de soi, et la disposition sous la forme d'un rectangle n'est pas suffisante pour ce faire, y compris pour ceux qui ont identifié la distributivité. Ces résultats ne sont pas étonnants en cours de formation, mais les productions analysées précisent des besoins potentiels de connaissances.

Alors que la grande majorité des étudiants interrogés réussissent les calculs algébriques proposés, des difficultés se manifestent lorsqu'ils se trouvent confrontés à l'utilisation de la distributivité pour effectuer des multiplications mentalement à partir d'un produit donné. Ces difficultés sont liées à la production d'une décomposition de l'un des facteurs en opérant des choix liés aux contraintes de l'énoncé. Lorsqu'elle est identifiée, les spécificités de la numération décimale de position gênent parfois la mise au jour ou l'écriture des techniques opératoires mises en œuvre. Elles se retrouvent dans les tentatives de production de traces écrites pour la classe : la traduction des techniques de calcul par des écritures symboliques résiste. Le passage d'un discours oral sur les manipulations des chiffres à un discours écrit qui doit tenir compte des conversions entre unités de numération ne semble pas transparent. Les commentaires comme ceux de Maureen (fig. 19, p. 121) à propos de l'algorithme de multiplication posée nous amènent à interpréter ces difficultés au-delà d'un manque de connaissances liées à la numération décimale, car d'autres connaissances relatives à des savoirs liés aux écritures symboliques sont en jeu de façon essentielle. Cette étudiante semble en effet chercher à traduire par une écriture symbolique une description de manipulations de chiffres. Or ces manipulations utilisent implicitement leur position dans les gestes d'écriture et une prise en compte séparée des chiffres, ce qui ne peut se traduire de façon satisfaisante par un programme de calcul, en particulier à cause des retenues (Constantin, 2014). L'écriture attendue sous forme d'égalité demande de réinterpréter cette description en appui sur des nombres, et non des chiffres, ce dont les étudiants ne semblent pas toujours avoir conscience. Elle demande aussi de prendre en compte les unités de numérations souvent omises dans les rhétoriques de soutien. Les erreurs d'écritures témoignent selon nous d'un besoin de formation quant à l'égalité en tant que relation d'équivalence, d'autant que l'on retrouve de façon prégnante l'interprétation des égalités comme équation dans la dernière partie du questionnaire.

Ces obstacles liés aux écritures paraissent les plus saillants au regard de notre corpus. Ils affleurent de même dans des tentatives d'adaptation de connaissances dans le cadre algébrique pour construire un discours pour la classe. Ainsi en est-il d'écritures fléchées qui renvoient à des transformations liées au développement et dont l'importation dans le cadre numérique néglige les différentes interprétations à la fois des calculs et de l'égalité. L'égalité ne peut témoigner en primaire d'une manipulation des écritures qui n'aura de sens que lorsqu'elle aura été construite au collège en appui sur la distributivité. Celle-ci n'est donc pas de nature à justifier les techniques mises en œuvre. Au regard des discours proposés, il apparaît que les éléments légitimant les techniques relèvent essentiellement des choix liés aux décompositions à opérer. De ce point de vue, les analyses des nombres sont pertinentes. Cependant, elles ne permettent pas de justifier l'égalité implicitement employée, autrement dit de justifier que la technique de calcul donne accès au résultat de la multiplication à effectuer. Si aucun étudiant ne fait le lien avec la théorie des aires, ce n'est pas le cas de l'addition itérée présente dans plusieurs copies. Des besoins de connaissances émergent alors pour distinguer les rôles dissymétriques des facteurs en particulier avec un facteur 1 en lien avec les oralisations.

Les difficultés observées semblent témoigner de besoin de formation, non seulement pour permettre de fonder des discours sur des éléments mathématiques pertinents, mais également pour distinguer et articuler véritablement des connaissances sur les écritures et des connaissances liées aux propriétés mathématiques qu'elles engagent.

Références bibliographiques

ASSUDE, T., COPPÉ, S. & PRESSIAT, A. (2012). Tendances de l'enseignement de l'algèbre élémentaire au collège : atomisation et réduction. In Coulange L., Drouhard J-Ph., Dorier J-L. et Robert A., Enseignement de l'algèbre élémentaire, bilan et perspectives*, Recherches en didactique des mathématiques, Hors Série,* 35-56*.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

BALL, D., HOOVER THAMES, M. & PHELPS, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

BUTLEN, D. & CHARLES-PEZARD, M. (2007). Conceptualisation en mathématiques et élèves en difficulté. Le calcul mental, entre sens et technique. *Grand N, 79*, 7-32.

CHEVALLARD, Y. (1997). Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en didactique des mathématiques, 17*(3), 17-54.

CLIVAZ, S. (2011). Des mathématiques pour enseigner : analyse de l'influence des connaissances mathématiques d'enseignants vaudois sur leur enseignement des mathématiques à l'école primaire. Dans Abboud-Blanchard M., Flückiger A. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques,* 247-262. ARDM. IREM Paris 7.

CLIVAZ, S. (2016). Connaissances mathématiques des enseignants et enseignement de l'algorithme de la multiplication, *Recherches en Didactique des Mathématiques, 36*(2), 231-261.

CONSTANTIN, C. (2014). *Quelles alternatives pour l'enseignement du calcul algébrique au collège ?* Thèse de doctorat, Aix-Marseille Université.

KIERAN, C. (1989). The early learning of algebra : A structural perspective. In S. Wagner et C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra,* 35-56. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics; Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

MA, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: teacher's indestanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah N.-J., Lawrence Erlbaum Associates.

MOK, I.A.C. (2010). Students' algebra sense via their understanding of the distributive law. *Pedagogies: an international journal, 5*(3), 251-263.

SFARD, A. & LINCHEVSKI, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification? The case of algebra. *Educational Studies in Mathematic*s*, 26*(26), 191-228.

TEMPIER, F. (2010). Une étude des programmes et manuels sur la numération décimale au CE2. *Grand N, 86*, 59-90.

Manuels scolaires

BRAULT R., DARO I., FERRERO C., PERBOS-RAIMBOURG, C. & TELMON, C. (2009). *Mathématiques 6e Collection Phare*, Paris : Éditions Hachette.

BOURGEAT F., BRUSTEL, A., CARLOD, V., JACQUEMOUD, D., KELLER, A., MAZE, M., PLANTIVEAU, A., PUIGREDO, F. & VERDIER, F. (2013) : *Mathématiques 6e Collection Transmath 6e*, Paris : Éditions Nathan.

BRIAND, J., NGONO, B., PELTIER, M.-L. & VERGNES, D. (2009) : *Euro Maths CM2*, Paris : Éditions Hatier.

BRIAND, J., NGONO, B., PELTIER, M.-L. VERGNES, D. (2009). *Euro Maths CM1*, Paris : Éditions Hatier.

CHAPIRON, G., MANTE, M., MULET-MARQUIS, R. & PEROTIN, C. (2009) : *Mathématiques 6e Collection Triangle*, Paris : Éditions Hatier.

DUSSUC, M.-P., MADIER, D., COMBIER, G. & CHARNAY, R. (2010). *Mathématiques CM2 Collection Cap Maths*, Paris : Éditions Hatier.