
LA CHASSE À LA BÊTE

UNE SITUATION RECHERCHE POUR LA CLASSE

Cécile OUVRIER-BUFFET

Université de Reims Champagne-Ardenne

Michelle ALVES et Céline ACKER

Professeures des écoles - École de Pommeuse

Les élèves des classes de CM1 et CM1/CM2

École de Pommeuse (année 2015-2016)

Introduction

Cet article a été réalisé avec la participation active de deux classes de primaire (une classe de CM1 et une classe de CM1/CM2¹) et des deux enseignantes suite au travail de recherche des élèves en classe sur une situation spécifique, dans le cadre de la semaine des mathématiques 2016. Le rôle de chacun des protagonistes de cette situation (le chercheur, les deux enseignantes, les élèves) est décrit au fil du texte. Le problème de recherche mathématique sur lequel les élèves ont travaillé est habituellement proposé en collège et lycée : il s'agit de « La chasse à la bête », un problème mettant en jeu des polyminos. Ce problème est encore ouvert pour les chercheurs en mathématiques dans le cas général. Cet article reviendra dans un premier temps sur les caractéristiques des **Situations Recherche en Classe (SiRC)**. Nous présenterons ensuite le problème mathématique de « La chasse à la bête » et les procédures relatives à l'activité de recherche, d'argumentation et de preuve mises en œuvre par des élèves de deux classes de cycle 3. L'analyse des procédures des élèves, ainsi que de larges illustrations de leurs productions, permettra de donner une meilleure vision des potentialités de la situation pour le cycle 3, et, dans la continuité, pour le cycle 4. Nous analyserons le travail d'argumentation et de preuve des élèves en fin d'article. Le lecteur pourra également se référer à d'autres articles parus dans *Grand N* sur les SiRC au cycle 3 (Gravier, Payan & Colliard, 2008 ; Godot, 2006) pour d'autres exemples de situations de recherche, ainsi qu'à la brochure IREM (Grenier & *al.*, 2016) consacrée davantage à l'enseignement secondaire et supérieur.

¹ 4^e et 5^e grades.

Les Situations Recherche en Classe (SiRC)

Les SiRC sont des situations didactiques particulières qui s'inspirent de l'activité du chercheur en mathématiques². Ces situations sont conçues généralement à partir de problèmes de recherche provenant des mathématiciens.

Les SiRC ont été caractérisées par Grenier et Payan (2003) de la façon suivante :

Une SiRC s'inscrit dans une problématique de recherche professionnelle. Elle doit être proche de questions non résolues³. Nous faisons l'hypothèse que cette proximité à des questions non résolues — non seulement pour les élèves, pour l'ensemble de la classe, mais aussi pour l'enseignant et les chercheurs — va être déterminante pour le rapport que vont avoir les élèves avec la situation.

La question initiale est facile d'accès : la question est « facile » à comprendre. Pour que la question soit facilement identifiable par l'élève, le problème doit se situer hors des mathématiques formalisées et c'est la situation elle-même qui amène l'élève à l'intérieur des mathématiques.

Des stratégies initiales existent sans que soient indispensables des pré-requis spécifiques. De préférence, les connaissances scolaires nécessaires sont les plus élémentaires et les plus réduites possibles.

Plusieurs stratégies d'avancée dans la recherche et plusieurs développements sont possibles, aussi bien du point de vue de l'activité (construction, preuve, calcul) que du point de vue des notions mathématiques.

Une question résolue renvoie très souvent une nouvelle question. La situation n'a pas de « fin ». Il n'y a que des critères de fin locaux. (Grenier et Payan, 2003, p. 191).

Les points de cette définition d'une SiRC seront illustrés avec le problème de « La chasse à la bête » ci-après. Cette définition sert de référent épistémologique.

Cette caractérisation n'est pas sans rappeler certains des éléments de définition des problèmes ouverts (Arsac, Germain et Mante, 1988), des situations problèmes, ou du *problem solving*. Il y a cependant des différences. En effet, une situation-recherche peut avoir une, plusieurs ou aucune solution. De plus, les valeurs des variables de recherche ne sont pas fixées au préalable. Les variables de recherche sont des variables de tâches inhérentes à la situation-recherche, leurs valeurs permettent de caractériser les différents sous-problèmes de la situation et les procédures afférentes (Godot, 2005, p. 133), à l'image des variables didactiques de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998). Enfin, dans une situation-recherche, il n'y a pas nécessairement de savoir mathématique notionnel visé ou à mobiliser. En effet, nous cherchons avant tout à mettre l'accent sur la démarche de recherche en elle-même : c'est pourquoi nous proposons des situations où les savoirs notionnels ne viennent pas faire obstacle au développement de la démarche de recherche. L'exemple traité dans cet article permettra de revenir sur les variables propres aux SiRC et à la démarche de recherche (argumentation et preuve en particulier) elle-même.

Par ailleurs trois aspects fondamentaux sont présents dans les SiRC, souvent absents dans la classe usuelle (voir Grenier & *al.*, 2016, p. 4 pour plus de détails) :

² Ces situations sont particulièrement travaillées au sein de la Fédération de Recherche *Maths à Modeler* (mathsamodeler.ujf-grenoble.fr/) dans le cadre d'un travail collaboratif entre chercheurs en didactique des mathématiques et chercheurs en mathématiques.

³ Il s'agit de questions encore ouvertes pour les chercheurs en mathématiques. Certaines SiRC ne vérifieront pas cette caractéristique (mais le problème de la chasse à la bête présenté dans cet article est en effet proche de questions encore ouvertes pour les chercheurs en mathématiques discrètes).

- L'« enjeu de vérité » : en classe, généralement, ce qui est à prouver est la plupart du temps annoncé comme vrai : « *Démontrer que* », il n'y a pas d'enjeu de vérité. Ou lorsque la question est ouverte : « *Que constatez-vous ?* », la réponse est évidente.
- L'aspect « social » de l'activité : dans une SiRC, il peut y avoir un réel enjeu social de production mathématique, même s'il est local (groupes d'élèves et professeur et/ou chercheur).
- L'aspect « recherche » : dans les manuels et les pratiques enseignantes, il est parfois déclaré que, pour résoudre un problème et pour prouver, « On utilise les propriétés du cours ». Cette consigne est en contradiction avec l'activité du chercheur et avec la démarche scientifique.

Les SiRC ont pour ambition de proposer une activité mathématique aux élèves, en dehors des notions et problèmes habituellement utilisés en classe. Les modalités de mise en œuvre en classe sont spécifiques (temps long, sur environ 5 séances, avec la présence d'un chercheur comme dans MATH.en.JEANS⁴) et apportent certes des contraintes : l'un des objectifs de cet article est de montrer les apports de ce type de situation pour le cycle 3 en particulier et, en prolongement, pour le cycle 4 des nouveaux programmes. Rappelons brièvement que les programmes officiels centrent l'enseignement des mathématiques sur la résolution de problèmes qui

« (...) constitue le critère principal de la maîtrise des connaissances dans tous les domaines des mathématiques, elle est également le moyen d'en assurer une appropriation qui en garantit le sens » (MEN, 2015, p. 198).

Ils insistent également sur le développement chez tous les élèves « *des six compétences majeures des mathématiques : chercher, modéliser, représenter, calculer, raisonner et communiquer.* » (*ibid.*, p. 198).

Le problème de « La chasse à la bête »

Présentation du problème général

Une bête est un polymino formé de quelques cases (connexes par les côtés). Le type de matériel utilisé dans « La chasse à la bête » est présenté en figure 1.

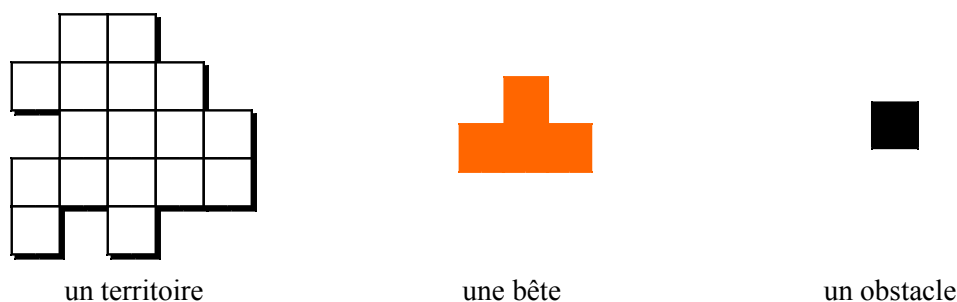


Figure 1 : Exemple de matériel utilisé pour « La chasse à la bête ».

Le problème de recherche est le suivant : aucune bête ne doit pouvoir se poser sur le territoire. On dispose des obstacles pour empêcher les bêtes de se poser. L'enjeu est de disposer le plus

⁴ MATH.en.JEANS : Méthode d'Apprentissage des Théories mathématiques en Jumelant des Établissements pour une Approche Nouvelle du Savoir (<http://www.mathenjeans.fr/>).

petit nombre d'obstacles sur le territoire. La forme et la taille du territoire peuvent varier, de même que pour les bêtes ou les obstacles. Dans la situation réalisée en classe, nous nous limiterons à des obstacles composés d'une seule case. On ne chasse qu'un seul type de bête à la fois.

Origine du problème mathématique

Ce problème est caractéristique des problèmes d'optimisation. En effet, pour montrer la valeur optimale, il convient d'une part d'exhiber une solution de cette valeur (« *il suffit* »), et d'autre part, faire une preuve montrant que l'on ne peut pas faire mieux (« *il faut* »). Avec des obstacles composés d'une seule case, il existe toujours une solution puisqu'en plaçant des obstacles sur chaque case (donc autant d'obstacles que de cases du territoire), on est sûr de piéger n'importe quelle bête.

Le problème de recherche mathématique dont est issue cette situation est dû à Golomb (1994) qui a travaillé sur le problème d'exclusion des pentominos (voir aussi Gravier & Payan, 2001). Dorbec (2007) a utilisé « La chasse à la bête » dans sa thèse comme présentation ludique du problème mathématique qu'il a traité (problème d'empilement et de recouvrement en théorie des graphes). On pourrait travailler sur un problème encore plus général, avec des territoires et des bêtes plus complexes (en restant dans le cadre des polyminos), ou en chassant plusieurs types de bêtes à la fois. Dans le cas général, ce problème est encore ouvert dans la recherche mathématique actuelle.

Analyse *a priori* du problème - Étude de trois cas

Au niveau « expert », nous allons présenter les raisonnements mathématiques possibles pour trois types de bêtes différents, sur le territoire 5×5 . Ces raisonnements et preuves mobilisent essentiellement des arguments portant sur les lignes et les colonnes, et nécessitent un travail sur les relations entre les notions de « nécessaire et suffisant », « au plus, au moins », « supérieur ou égal à / inférieur ou égal à ». Les bêtes chassées dans cet article, et celles utilisées dans la situation de classe qui sera décrite plus loin, seront, dans cet ordre : la bête « domino » (qui occupe deux cases consécutives), la bête « trimino long » (qui occupe trois cases consécutives « en long »), et la bête « trimino en L » (qui, comme son nom l'indique, occupe trois cases en forme de L).

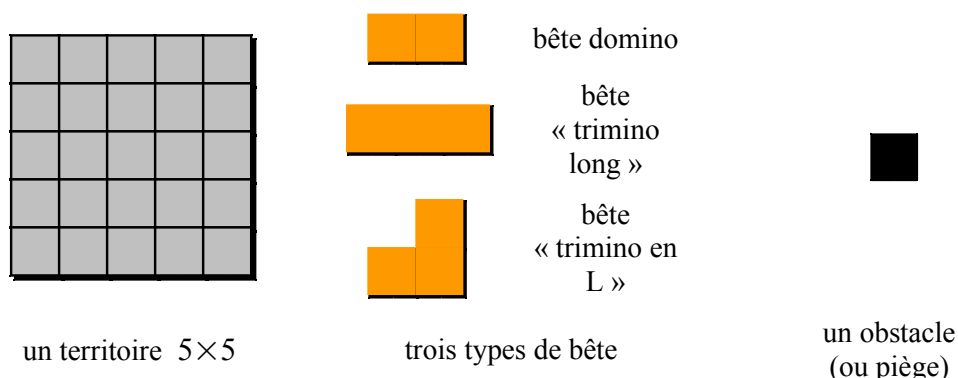


Figure 2 : La chasse à la bête - Étude de trois cas.

Chasse à la bête « domino » sur un carré 5×5

Une bête « domino » recouvre deux cases adjacentes : il est nécessaire de placer un obstacle une case sur deux. On obtient ainsi une solution à 13 obstacles... et une solution à 12 obstacles (figure 3).

Comment pouvons-nous démontrer que 12 est la solution optimale dans cette configuration ? Nous pouvons facilement montrer que 12 bêtes « domino » peuvent se poser sur le territoire 5×5 : ainsi, 12 obstacles « au moins » sont nécessaires (il s'agit d'une borne inférieure). Il suffit alors d'exhiber une solution à 12 obstacles pour pouvoir conclure que 12 est effectivement la solution optimale. Nous avons ainsi démontré qu'il fallait 12 obstacles pour empêcher la bête « domino » de se poser sur le carré 5×5 .

Nous avons utilisé l'argument suivant, noté dorénavant « argument P » : « Si on peut placer x bêtes sur le territoire sans qu'elles ne se chevauchent, alors il faut au moins x obstacles pour chasser la bête du territoire⁵ ».

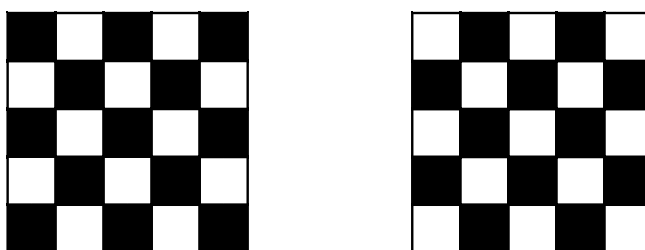


Figure 3 : Solution à 13 pièges et solution à 12 pièges pour chasser la bête « domino ».

Chasse à la bête « trimino long » sur un carré 5×5

La figure 4 propose une solution à 9 obstacles et deux solutions n'utilisant que 8 obstacles pour chasser la bête « trimino long ».

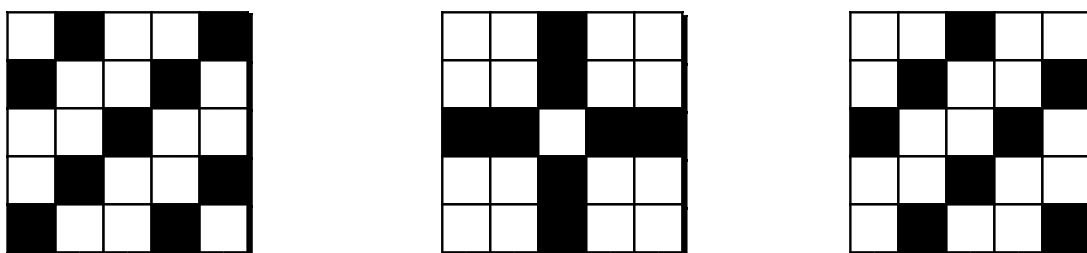


Figure 4 : Solution à 9 obstacles (à gauche) et deux solutions à 8 obstacles (au centre et à droite) pour chasser la bête « trimino long ».

Il nous faut maintenant démontrer que 8 est la solution optimale pour ce type de bête.

La première solution à 8 obstacles pour chasser la bête « trimino long » (figure 4, au centre) nécessite un raisonnement où l'on progresse ligne par ligne puis colonne par colonne. La seconde solution à 8 obstacles (figure 4, à droite) mobilise un raisonnement où l'on part d'un coin de la grille et on pose un obstacle « toutes les 3 cases » en cheminant sur la grille (à l'image

⁵ Autre formulation : si nous arrivons à poser x bêtes sur le territoire de sorte qu'aucune case n'est occupée par plus d'une bête, alors il faudra au moins x obstacles pour chasser la bête du territoire.

de ce qui a été dit précédemment pour la bête « domino » où l'on pose un obstacle « une case sur deux »).

Première preuve possible

On dispose le plus grand nombre possible de bêtes sur le territoire (c'est un pavage). Il est possible d'en placer 8.

Il nous faut donc au moins 8 obstacles pour empêcher les bêtes de se poser (selon l'« argument P » énoncé précédemment) ; comme nous avons trouvé des solutions n'utilisant que 8 obstacles, cela permet de conclure.

Nous avons ainsi montré que la solution optimale pour empêcher la bête « trimino long » de se poser sur le carré 5×5 est 8 obstacles.

Remarque : cette technique est facilement généralisable à d'autres tailles de territoire rectangulaire. Pour un rectangle de taille n par m , on obtient la partie entière de $\frac{nm}{3}$ obstacles (Dorbec, 2007).

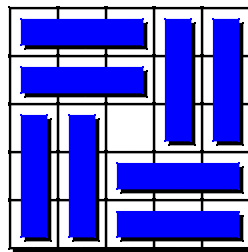


Figure 5 : Pavage du carré 5×5 par des bêtes « trimino long ».

Deuxième preuve possible

Nous pouvons construire une autre preuve en utilisant des arguments sur les lignes et les colonnes du territoire. Cette preuve étant un peu fastidieuse, nous la proposons en annexe 1.

Chasse à la bête « trimino en L » sur un carré 5×5

L'argument de pavage par des bêtes (« argument P ») ne suffit plus, car nous ne pouvons mettre que 8 bêtes « trimino en L » dans un carré 5×5 alors que la meilleure solution que nous obtenons utilise 10 obstacles (figure 7).

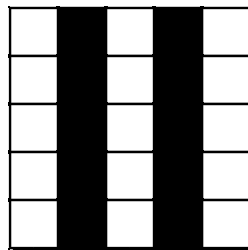


Figure 7 : Solution à 10 obstacles pour chasser la bête « trimino en L ».

Nous obtenons alors, seulement, un **encadrement** sur la valeur de l'optimum. De tels résultats

sont courants dans les problèmes de recherche ; toutefois, nous pouvons dans ce cas précis raffiner la preuve par pavage afin de montrer que 10 obstacles sont nécessaires.

Nous remarquons tout d'abord que la bête « trimino en L » se place en fait sur un carré 2×2 (figure 8). Il nous faut alors un obstacle pour la bête posée sur ce carré 2×2 et encore un obstacle supplémentaire sur la case restante afin qu'aucune autre bête « voisine » ne vienne empiéter sur le carré 2×2 .



Figure 8 : Comment empêcher la bête « trimino en L » de se poser sur un carré 2×2 ? Deux obstacles sont nécessaires.

Ainsi, pour chaque carré 2×2 , il nous faut 2 obstacles. On essaie alors de disposer ces blocs 2×2 sur le territoire. « Au pire », on en a 4 (on peut faire la liste des différents cas possibles) et deux bêtes peuvent encore se poser : il nous faut donc 4 fois 2 obstacles plus 2, c'est-à-dire 10 obstacles pour empêcher la bête de se poser (figure 9).

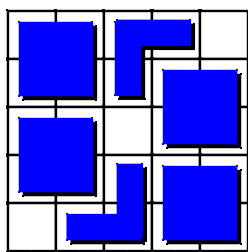


Figure 9 : Disposition de blocs 2×2 sur le territoire 5×5 .

Autre argumentation possible : raisonnons sur les colonnes du territoire. Vu la forme de la bête, regardons ce qu'il se passe sur les 2 premières colonnes. Au mieux, nous pouvons disposer 4 obstacles pour empêcher la bête de se poser (deux bandes de deux). Nous raisonnons ensuite sur les deux colonnes suivantes et enfin sur la dernière colonne. Nous obtenons alors la solution à 10 obstacles (figure 10).

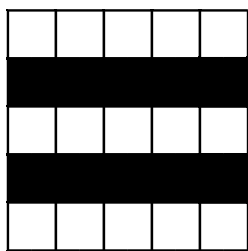


Figure 10 : Solution optimale à 10 obstacles pour chasser la bête « trimino en L ».

Une mise en œuvre possible pour la SiRC « La chasse à la bête »

Pour des élèves de primaire, les connaissances et compétences travaillées avec les SiRC recouvrent essentiellement des compétences liées à un pré-apprentissage de la preuve

(notamment : notion de conjecture, liste exhaustive de tous les cas, se ramener à un cas plus petit, utiliser l'induction, formuler des arguments en condition nécessaire et condition suffisante). Les pavages et techniques de pavage sont également centraux dans la SiRC de « La chasse à la bête ». Par ailleurs, apparaissent des connaissances ici décontextualisées, comme la symétrie.

Cette situation peut se dérouler sur 5 séances d'environ d'une heure, en particulier pour des élèves de primaire, voire du début du collège. Il est possible de « fermer » un peu la situation afin de gagner du temps — en proposant le travail de recherche pour les bêtes « domino » et triminos — et de la réouvrir ensuite — avec le problème général où les élèves peuvent choisir la taille du territoire et une forme de bête à chasser.

On négocie ce problème avec les élèves comme un problème de recherche : il provient de la recherche mathématique actuelle, il n'est que partiellement résolu, et on va essayer de l'étudier dans certains cas. L'objectif n'est pas de trouver « la » solution, mais d'explorer le problème et de dégager des résultats locaux à défaut d'être globaux. Cela étant, on peut bien sûr toujours poser la question de la généralisation des preuves proposées dans des cas particuliers. Dans l'expérimentation présentée ci-dessous, **l'enjeu pour les élèves était de contribuer explicitement à la rédaction de cet article.**

Nous avons travaillé avec deux classes, les élèves cherchant sur le problème en groupes (hétérogènes) : une classe de CM1 et une classe de CM1/CM2.

Le déroulement de la séquence prend appui sur différentes valeurs des **variables de recherche**. Dans cette situation, deux variables de recherche sont importantes : le « type de territoire » et le « type de bête ». Les territoires rectangulaires (et en particulier les carrés) sont les plus simples pour l'appropriation et la résolution mathématique du problème (et donc pour sa dévolution). Les valeurs prises par la variable de recherche « type de bête » vont permettre de faire évoluer les procédures de recherche et de preuve des élèves (voir l'analyse mathématique précédente et le déroulement des séances ci-après).

Dans notre cas, les cinq séances d'environ une heure prévues dans les deux classes, réalisées pendant la semaine des mathématiques, en parallèle, ont été les suivantes⁶.

Séance 1 : Dévolution du problème et chasse à la bête « domino »

Les objectifs de cette séance sont de familiariser les élèves avec le matériel et leur permettre de s'approprier le problème, et de les inciter à garder une trace écrite de leur recherche (dans un cahier de recherche) afin d'assurer la continuité de leur recherche pour les séances suivantes et d'avoir des éléments tangibles pour la rédaction finale des résultats de leur travail.

Dans cette séance, les élèves sont par groupe de 3 ou 4. Le matériel est distribué : un territoire, des bêtes « domino » en nombre suffisant (plus de 12), des obstacles en nombres suffisants (plus de 13). Le problème, déjà annoncé comme un problème issu de la recherche mathématique et encore ouvert pour les chercheurs, en début de séance, est présenté de la façon suivante :

Nous allons chasser la bête du territoire (on peut l'appeler ici bête « domino » pour illustrer, mais c'est facultatif). Pour cela, nous allons l'empêcher de se poser sur le territoire en plaçant des obstacles. Question : combien faut-il de obstacles pour empêcher ce type de bête de se poser ?

Il est possible de laisser 5 minutes de recherche et surtout de manipulation aux élèves : ceux-ci

⁶ Remarques : dans l'expérimentation relatée au long de cet article, la séance 2 initialement prévue a en fait débuté le même jour que la séance 1. Le déroulement décrit ci-dessous est indicatif et modulable suivant les SiRC (cf. Gravier, Payan et Colliard, 2008 & Godot, 2006).

trouvent facilement des solutions. On propose ensuite aux élèves la question suivante : « *Quel est le plus petit nombre possible d'obstacles à poser sur le territoire afin d'empêcher les bêtes de se poser ?* ». Il est fondamental de demander aux élèves une argumentation de ce qu'ils proposent : c'est pour cela que la finalité de la SiRC doit être très claire dès le départ (parmi les finalités possibles : rédaction d'un article, présentation lors d'un séminaire recherche junior organisé en partenariat avec des chercheurs ou toute autre communication des résultats de la recherche des élèves). Dans notre cas, la rédaction de cet article a été annoncée aux élèves : la structure d'un article (pour *Grand N*) a été expliquée aux élèves, ainsi que le processus de relecture et d'édition. Nous avons également défini un rôle pour chacun : le chercheur⁷ et les deux enseignantes avaient à rédiger la partie « théorique » (présentation du problème mathématique et mise en œuvre de la situation), et les élèves ont eu, par groupe, une tâche bien définie (ces tâches ont été précisées dans la séance 5). Pour les élèves, la finalité était clairement identifiée dans ce travail : il s'agissait de produire des arguments pour démontrer qu'ils avaient trouvé des solutions et que celles-ci étaient optimales.

Séance 2 : Mise en commun sur la bête « domino » et introduction de la bête « trimino long »

Les élèves finalisent une partie de leur recherche sur la bête « domino » et rédigent leurs arguments (la séance 1 ne permet pas toujours, au regard du temps consacré, de parvenir à cette étape). L'enseignant reprend les « idées » des différents groupes d'élèves lors d'une mise en commun et réalise une affiche recensant ces « idées » (le vocabulaire, à dessein, est généraliste au cycle 3, les termes de « preuve » ou de « conjecture » sont mis de côté dans un premier temps et peuvent être introduits progressivement au fil des séances pour donner un statut spécifique aux énoncés mathématiques produits par les élèves) : il s'agit bien là d'une mise en commun des « idées » et non d'une institutionnalisation d'arguments mathématiques ou de preuves. Les « idées » en question sont ainsi portées à la connaissance de tous et pourront être mises à l'épreuve pour les autres types de bête. La question suivante est alors apportée par l'enseignant :

Nous allons maintenant chasser la bête « trimino long » : lorsque vous aurez trouvé des solutions, vous déterminerez si les « idées » qui fonctionnaient pour la bête « domino » peuvent être réutilisées.

Séance 3 : Confrontation des arguments utilisés pour les bêtes « domino » et « trimino long », et introduction de la bête « trimino en L »

Cette phase est particulièrement importante, car elle fera fonction d'institutionnalisation de résultats locaux : quels sont les arguments mathématiques qui permettent de prouver les solutions optimales trouvées pour les bêtes « domino » et « trimino long » ?

L'introduction de la bête « trimino en L » permet en particulier de mettre en défaut un raisonnement incomplet qui consisterait à dire que « *si x bêtes peuvent se poser sur le territoire, alors la meilleure solution a nécessairement x obstacles* ».

⁷ Cécile Ouvrier-Bufferet, chercheuse en didactique des mathématiques, impliquée dans la recherche en didactique des mathématiques sur les SiRC, connaissant et pratiquant « La chasse à la bête » à différents niveaux de classe (secondaire, supérieur, formation des enseignants, formation doctorale). Le rôle joué par le chercheur ici est d'accompagner les enseignants et les élèves dans la formulation des « idées » des élèves lors de la mise en commun, ainsi que de prendre en charge l'analyse des productions d'élèves pour l'écriture de cet article.

Séance 4 : Confrontation des arguments utilisés pour les trois types de bêtes - début de la rédaction (si possible) des résultats de recherche de la classe

Cette séance permet de préparer la séance suivante de rédaction. Les élèves doivent définitivement retenir les éléments de preuve permettant de rédiger un article ou une présentation. Ce passage à l'écrit est fondamental. La validation des résultats vient du travail entre pairs, et l'enseignant (ainsi que l'éventuel chercheur présent dans la classe) est le garant du bon déroulement mathématique de cette phase. La gestion en classe des SiRC par l'enseignant et le chercheur est globalement similaire à celle d'un problème ouvert. La mise en œuvre et les modalités de travail consistent, entre autres, à « *pratiquer une pédagogie de l'encouragement* », en particulier, « *ne pas fermer le problème [l'] amène souvent à répondre à une question par une autre* » (Arsac & al., 1988, p. 15)). Plus spécifiquement pour les SiRC, le chercheur accompagne l'enseignant pour l'identification des procédures des élèves et la gestion de la mise en commun : en effet, les différentes procédures mathématiques sont parfois difficiles à identifier et à reformuler.

Séance 5 : Rédaction des résultats de recherche de la classe

Dans le but d'organiser la rédaction des résultats produits par les élèves, il est possible d'envisager des tâches différentes suivant les groupes d'élèves afin de proposer une différenciation : la rédaction de la présentation du problème, la présentation des résultats obtenus, la présentation des « idées » discutées (celles qui ont été conservées car opérationnelles pour les différentes bêtes, et celles qui ont été écartées en précisant pour quelles raisons), et la rédaction de preuves pour les différents types de bêtes. Les cahiers de recherche et affiches sont les principaux supports utilisés, et le matériel de manipulation est retiré de cette phase afin que les élèves se concentrent sur la présentation écrite de leurs résultats. Lors de cette dernière séance, il est possible de réouvrir la situation en revenant au problème général (autres territoires, autres types de bêtes).

Gestion du processus d'argumentation et de preuve en classe

Dans cette partie, nous allons nous concentrer sur la gestion en classe des processus d'argumentation et de preuve amorcés par les élèves. Comme nous n'avons pas de travaux recensant les productions d'élève de primaire sur « La chasse à la bête », nous prenons comme référence les procédures généralement observées lors de séances conduites dans le secondaire ou le supérieur pour cette SiRC. L'importance des valeurs successives prises par la variable de recherche « type de bête » (bête « domino », bête « trimino long », bête « trimino en L ») sera ainsi démontrée par l'évolution des procédures de preuves. L'expérimentation en cycle 3 nous permettra ensuite d'établir la distance éventuelle entre les preuves mises en œuvre dans le secondaire et celles qu'il est possible de solliciter réellement au niveau primaire (nous reviendrons sur ce point dans les analyses et la conclusion).

La chasse à la bête « domino » - un raisonnement erroné

Nous avons vu précédemment qu'il existe une solution à 13 obstacles et une solution à 12 obstacles. La solution à 12 obstacles est-elle optimale ?

Une idée généralement évoquée par les élèves consiste à argumenter ainsi : « si l'on enlève un obstacle, ce n'est plus une solution, car une bête peut alors se poser ». Ainsi, la solution à 12 obstacles serait optimale. Or, un tel raisonnement montrerait que la solution à 13 obstacles serait,

elle aussi, optimale, ce qui n'est pas le cas puisqu'une solution à 12 obstacles a été exhibée. Ce raisonnement « erroné » a été fréquemment observé dans les expérimentations réalisées en collège, en lycée et dans le supérieur. C'est là que l'enseignant et/ou le chercheur doit tenir un rôle afin de montrer le problème lié au raisonnement des élèves. Cela pose la question mathématique de la différence entre un minimum *local* et un minimum *global*.

À l'issue du travail des élèves sur la chasse à la bête « domino », l'enseignant peut institutionnaliser le fait que l'on a utilisé l'argument suivant : « *Si on peut placer x bêtes sur le territoire sans qu'elles ne se chevauchent, alors il faut au moins x obstacles pour chasser toute bête du territoire* ». C'est à l'enseignant (et à l'éventuel chercheur présent lors de la situation) de décider des arguments institutionnalisés au fur et à mesure de la recherche, en fonction du travail des élèves. Attention cependant à ne pas institutionnaliser trop rapidement des résultats, car cela pourrait démotiver la recherche de certains groupes.

La chasse à la bête « trimino long » sur le territoire 5×5

Après des solutions de 11, 10 ou 9 obstacles, les élèves exhibent généralement des solutions n'utilisant que 8 obstacles. Après plusieurs tentatives infructueuses avec 7 obstacles, les élèves sont rapidement convaincus que l'optimum est 8. On leur demande alors de montrer que l'on ne peut pas avec 7 obstacles (même des chercheurs !).

À ce stade de la situation, il apparaît généralement une des difficultés majeures dans l'enseignement des mathématiques : la nécessité de preuve. Pour les élèves, les échecs successifs suffisent et l'argumentation n'apparaît pas nécessaire surtout pour ceux qui ont des difficultés à se dissocier de l'objet. On tente de les amener vers une démarche plus rationnelle en leur proposant de montrer des propriétés plus simples telles que : peut-on y arriver avec 1 obstacle, 2, 3, ... ?

Un argument de « pavage » peut apparaître (le problème du pavage est un problème dual à la chasse à la bête) : si on peut mettre x bêtes disjointes sur le territoire, alors il faudra au moins x obstacles pour piéger toutes les bêtes (« argument P » précédemment cité). Il est fondamental de prendre la mesure de la signification du « au moins » dans ce genre de preuve. En effet, les élèves pourraient croire que si 8 bêtes pavent le territoire (ce qui est le cas avec les triminos longs), alors 8 obstacles est la meilleure solution puisqu'un obstacle permet de chasser une bête. Cet argument incomplet sera d'autant plus résistant que le même phénomène se produit pour la bête « domino ». La chasse de la bête « trimino en L » va permettre de soulever ce problème de raisonnement de manière déterminante pour la recherche des élèves.

La chasse à la bête « trimino en L » sur le territoire 5×5

Son déroulement est similaire à la séance précédente et les élèves peuvent réinvestir la démarche de preuve abordée. Cependant, l'argument de pavage par des bêtes ne suffit plus, car on ne peut placer que 8 bêtes dans un carré 5×5 alors que la meilleure solution obtenue utilise 10 obstacles. Comme indiqué p. 10, nous obtenons alors, seulement, un **encadrement** sur la valeur de l'optimum. De tels résultats sont courants dans les problèmes de recherche ; toutefois, on peut dans ce cas précis raffiner la preuve par pavage afin de montrer que 10 sont nécessaires. On peut aborder cette nouvelle preuve avec certains élèves.

Ouvertures possibles

On peut ensuite réinvestir ces idées et/ou méthodes en proposant aux élèves d'étudier les mêmes bêtes sur d'autres territoires plus grands (carré 7×7 par exemple) ou de formes différentes

(rectangle, disque, *etc.*). Il est donc fondamental, dans une telle ouverture, de penser aux phases d'institutionnalisation et de mettre en valeur les idées des élèves lors des recherches sur les cas précédents, ainsi que les conjectures, sans fermer les pistes de recherche et arguments des élèves. L'expérimentation en cycle 3 dont l'analyse suit nous permettra d'appréhender les pistes tangibles de travail sur l'argumentation et la preuve à ce niveau de classe avec une SiRC.

Résultats de recherche produits par les élèves

Contexte et organisation

Nous avons proposé « La chasse à la bête » pendant la semaine des mathématiques 2016 sur 5 séances. Deux classes ont participé : 28 élèves de CM1 et 24 élèves de CM1/CM2. Le **contrat** était clair : il s'agit d'un problème de recherche ouvert pour les chercheurs en mathématiques et la **finalité** était de produire une contribution à cet article. Une mise au défi des parents est également prévue pour la fête de l'école.

Le chercheur a travaillé en collaboration avec les enseignantes, en étant présente dans la classe pour toutes les séances, ce qui a permis de négocier un contrat « de recherche » spécifique avec les élèves. La dévolution du problème a été réalisée par le chercheur, en prenant appui sur l'origine historique du problème (Golomb, 1994, livre sur les polyminos, apporté en classe), quelques applications et intérêts des pavages, l'évocation du jeu *Tétris*. Par ailleurs, l'explication de la rédaction de cet article a été réalisée par le chercheur (une revue *Grand N* était présente en classe (*cf.* la description des séances ci-dessus). Conjointement, enseignantes et chercheur ont transmis les différents problèmes, géré les groupes (aspect matériel et gestion d'éventuels conflits entre élèves), identifié les procédures des élèves, réalisé les affiches (en étant scripteur, sans apporter de validation) et proposé des contre-exemples aux élèves si nécessaire.

Les élèves ont travaillé en groupes de 4, sur cinq séances consécutives de 50 minutes, pendant la semaine des mathématiques. Dans chaque séance, un moment de mise en commun était prévu pour montrer à chaque groupe ce qui est fait par les autres groupes, mais avec une certaine « modération » pour ne pas « tuer » des stratégies naissantes : il n'y a donc eu que des institutionnalisations très locales dans les trois premières séances. Les élèves disposaient du matériel (en papier cartonné) et d'un mini-cahier de recherche pour garder une trace écrite de leur recherche. Des affiches ont été réalisées par les enseignantes et le chercheur, sous la dictée des élèves, afin de conduire les mises en commun pour répondre à la question suivante : « *Quelles sont vos idées ? Sont-elles réutilisables quand on change de type de bête ?* ».

Pour des raisons d'équité entre les deux classes, nous reproduisons dans cet article les procédures des élèves des deux classes (nous avons en effet impliqué les élèves dans la rédaction de cet article, il est donc fondamental que leurs productions soient visibles en tant que telles). Cette expérimentation s'inscrit par ailleurs dans le projet de l'école (2015-2018), à savoir : « *Agir sur le climat de l'école pour améliorer les résultats scolaires des élèves* ». De plus, cette présentation exhaustive des productions des élèves est importante pour les formateurs et enseignants qui souhaiteraient s'initier aux SiRC. En conséquence, nous avons choisi d'aborder le travail d'argumentation et de preuves des élèves dans un paragraphe spécifique de conclusions.

La dévolution d'un véritable contrat de recherche

Le contrat mis en place dans les classes est un contrat de recherche dans le sens où tous les acteurs de la situation (les élèves, mais aussi les enseignantes et le chercheur présent en classe)

travaillent sur le problème de recherche ; personne n'est explicitement détenteur du savoir ou de « la » solution. Ce contrat de recherche est visible dans le cahier de recherche des élèves, leur rédaction soulignant que le rapport à ce problème est différent du rapport usuel aux problèmes habituellement travaillés en classe, par exemple : « *Nous avons aussi découvert que 11 est impossible si on colorie une case sur 2. La question est : est-on obligé de colorier 1 case sur 2 ?* » (CM1, bête « domino »), ou encore « *Toutes les équipes ainsi que nous commençant à croire que 9 est impossible.* » (CM1, bête « trimino en L »).

Dans ce qui suit, les productions des élèves seront issues des cahiers de recherche des élèves (avec correction orthographique et grammaticale) et des affiches réalisées en classe.

Exemples de phases de recherche des élèves

Les photos ci-dessous montrent le matériel utilisé et, du fait de manipulations différentes du matériel, des approches du problème elles aussi différentes. La consigne induit un type de manipulation : en effet, il est demandé de trouver le plus petit nombre d'obstacles possible et donc il est naturel que les premières manipulations s'orientent sur le placement d'obstacles. En revanche, paver le territoire par des bêtes puis les chasser et/ou construire un argument prenant en compte le nombre de bêtes est plus long à se mettre en place.

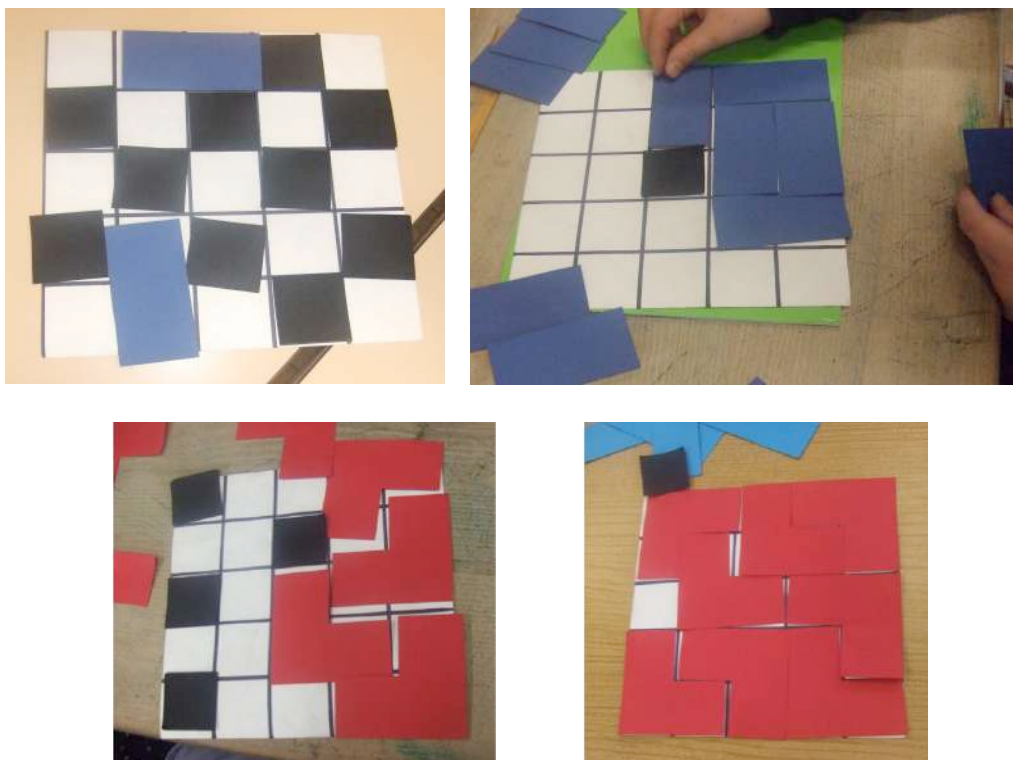


Image 1 : Deux approches différentes du problème : chasser les bêtes une à une en plaçant les obstacles un à un (conformément à la consigne), à gauche, et paver le territoire par des bêtes, à droite.

Procédures de recherche des élèves

La recherche des élèves, dès le travail sur la bête « domino », n'a pas conduit à l'argument

erroné mentionné dans l'analyse *a priori*⁸. Cet argument a vaguement été évoqué par un groupe de CM1/CM2 mais n'a pas du tout été retenu, sa durée de vie a été fugace. Pour faciliter la compréhension des procédures des élèves de ces deux classes, nous avons choisi de présenter leurs résultats de façon chronologique, et de revenir dans la partie suivante sur le travail de rédaction qui leur a été demandé en lien avec cet article.

Les élèves face à la bête « domino »

Nous notons une procédure ayant un fondement commun entre les deux classes : une bête « domino » occupe deux cases : « *Nous avons mis un piège sur deux car la bête occupe 2 cases.* » (CM1), « *Nous avons fait 1 sur 2.* » (CM1/CM2). Cela conduit les élèves à la solution à 13 obstacles et la solution à 12 obstacles (figure 3).

Les stratégies mobilisant un pavage du territoire par les bêtes sont minoritaires dans les deux classes : la consigne porte sur le nombre minimal d'obstacles et cela induit une manipulation des obstacles en priorité. Les gestionnaires de la situation peuvent induire le pavage par les bêtes si nécessaire.

Les **CM1** sont très rapidement sur l'idée que « *Pour une bête, il faut un piège* » :

On a commencé par 13 obstacles et on a compris qu'il pouvait y avoir une autre solution, alors on a regardé, compté et même observé. On a vu longtemps après qu'il pourrait y avoir une solution à 12 obstacles. Nous avons mis toutes les bêtes sur le plateau, on a remarqué qu'il y avait un trou et qu'il y avait 12 bêtes comme les obstacles. Sachant que pour chasser une bête il faut 1 obstacle (CM1).

Certains entament des essais en raisonnant sur les lignes et les colonnes.

Les **CM2** se sont davantage concentrés sur des arguments en lien avec la **division** : « *En posant toutes les bêtes : 12 obstacles. La moitié de 25 est 12,5, on peut pas couper une case sur 2.* » (CM1/CM2). Les arguments sont parfois ardues :

C'est impossible [de faire mieux], car $25 \div 2 = 12,5$ donc si une bête fait deux cases, tu dois en mettre 1/2 dont la fraction $25 \div 2 = 12,5$. Les bêtes il y en a 12 donc si il y a de la logique, il reste 1 case et 0,5 donc $1 - 0,5 = 0,5$, il reste 0,5. (CM1/CM2).

ou encore « *On en peut pas faire moins que 12 parce que $12 + 12$ ça fait 24 et c'est le plus proche de 25 et $24 \div 2 = 12$.* » (CM1/CM2).

Dans les affiches réalisées dans les deux classes à l'issue de la recherche sur la bête « domino », il ressort les idées suivantes (tableau 1). Le chercheur a volontairement numéroté les idées des élèves lors de la mise en commun pour faciliter les discussions ultérieures sur celles-ci. Chaque colonne du tableau représente l'affiche réalisée dans chacune des deux classes. Il n'y a aucune corrélation entre les lignes du tableau et les numéros des idées.

Cette mise en commun permet aux élèves d'avoir un référent pour la suite du travail. Les « idées » émises lors de la recherche avec la bête « domino » peuvent être adaptées et réutilisées par la suite, voire abandonnées lors de la confrontation de celles-ci avec les autres types de bêtes. Les affiches sont systématiquement présentes dans la classe au fil des séances.

⁸ « *Si l'on enlève un obstacle, ce n'est plus une solution car une bête peut alors se poser* ».

Affiche CM1	Affiche CM1/CM2
2 solutions : 12 et 13 obstacles. 11 est impossible.	
Idée 1 : les échecs pour colorier les cases en diagonale.	Idée 1 : 11 c'est impossible.
Idée 2 : pour une bête, il faut 1 piège.	Idée 2 : on essaie de mettre le moins possible d'obstacles sur les bords.
Idée 3 : si on recouvre le terrain, on a 12 bêtes.	Idée 3 : $24 \div 2 = 12$ donc 12 obstacles (à discuter).
Idée 4 : pour chasser une bête, il faut AU MOINS ⁹ 1 piège.	Idée 4 : dans la solution à 13, on a 12 cases blanches, en changeant la coloration on trouve une solution à 12.
Idée 5 : placer les pièges sur chaque ligne.	Idée 5 : on recouvre le terrain avec 12 bêtes et on les chasse une à une et on met 12 obstacles. Quand je veux chasser une bête, combien dois-je mettre d'obstacles ?
Idée 6 : on place 1 piège une case sur deux.	Idée 6 : on place un obstacle 1 case sur 2.
Idée 7 : nombre pair ou nombre impair sur les diagonales ¹⁰ \Rightarrow 11 est impossible.	Idée 7 : $25 \div 2 = 12,5$ donc 12 obstacles car la bête occupe 2 cases.

Tableau 1 : Affiches réalisées avec les élèves lors de la mise en commun des « idées » sur la bête « domino ».

Les élèves face à la bête « trimino long »

Les procédures sont nombreuses.

En CM1, les arguments en lien avec le **pavage** soulignent la difficulté à généraliser l'idée « *pour chasser une bête, il faut au moins un piège* » et à formuler et utiliser l'« argument P » : « *Si on peut placer x bêtes sur le territoire sans qu'elles ne se chevauchent, alors il faut au moins x obstacles pour chasser la bête du territoire.* ».

- « *Pour chaque bête trimino, il faut 1 piège. On a essayé une solution à 7 mais c'est impossible. On peut placer 8 bêtes trimino.* » (CM1).
- « *Pour chasser 8 bêtes, il faut 8 pièges. Pour chasser 9 bêtes, il faut 9 pièges.* » « *Avec*

⁹ Suite à cette expérimentation, nous pouvons faire l'hypothèse que cette idée doit être induite par l'enseignant ou le chercheur dans la gestion de la SiRC au niveau du cycle 3. Un groupe d'élève en CM1 a un peu essayé de formuler cette idée qui a été reprise par le chercheur.

¹⁰ Il s'agit d'un groupe de CM1 qui a formulé son argument ainsi : « *Nous avons trouvé 12 et nous sommes sûrs que 11 est impossible car 13 utilise des nombres impairs (5 et 3) sur les diagonales et que 12 utilise des nombres pairs (4 et 2) sur les diagonales, cela veut dire que 11 utilise les nombres impairs 1 et 3 et que cela fait un trou au milieu de 3 cases où on peut placer la bête « domino ». Nous avons aussi découvert que 11 est impossible si on colorie 1 case sur 2.* ».

8 pièges on peut chasser 8 bêtes » (CM1).

- *« En posant toutes les bêtes sur le terrain, on a posé 8 pièges. » (CM2).*
- *« (...) en recouvrant la surface de bêtes, nous les avons enlevées au fur et à mesure qu'on avançait. Et après, Mathys a suggéré d'enlever l'obstacle du milieu et puis on a trouvé une solution à 8. » (CM1).*

Lorsque l'« argument P » est induit par l'enseignant ou le chercheur, ce qui est nécessaire en cycle 3, les élèves changent de formulation :

- *« Il faut au moins 1 piège par bête. » (CM2).*
- *« Pour chaque bête, qu'elle soit domino ou trimino, il faut au moins 1 piège. » (CM1).*

Des arguments mobilisant un raisonnement sur les lignes et les colonnes sont également apparus en CM1 :

Nous avons fait une ligne d'obstacles verticale pour bloquer les bêtes horizontales et une ligne horizontale pour bloquer les bêtes verticales. Puis nous avons enlevé l'obstacle du centre. On a essayé 7, mais c'est impossible. » (CM1).

En CM2, l'argument mobilisant la division est resté prédominant et a diffusé dans les groupes : *« On ne peut pas mettre moins car $25 \div 3 = 8,3$. » (CM2).* L'enjeu ici a été identique aux précédents arguments : cette division, dans le cas d'un territoire carré uniquement, nous renseigne effectivement sur le nombre minimum d'obstacles. Ainsi, pour le cas de la bête trimino, le quotient de la division euclidienne de 25 (taille du territoire) par 3 (taille de la bête trimino) nous indique le nombre minimum d'obstacles nécessaires.

Dans les affiches réalisées dans les deux classes à l'issue de la recherche sur la bête « trimino long », il ressort les idées suivantes :

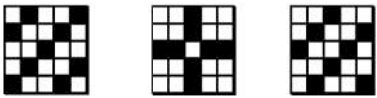
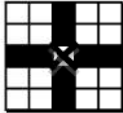
Affiche CM1	Affiche CM1/CM2
<p>Solutions à 8 : sur les diagonales, en croix. Solutions à 9 : sur les diagonales, en croix. Solution à 7 impossible.</p>	<p>1 solution à 9 obstacles et 2 solutions à 8 obstacles :</p>  <p>7 est impossible.</p>
<p>Idée 1 : cela donne une solution à 8 en diagonales.</p>	<p>Idée 5¹¹ : on peut placer (au plus) 8 bêtes → 8 obstacles (1 obstacle par bête).</p>
<p>Idée 3 : ici on peut placer 8 bêtes.</p>	<p>Idée 6 : on place un obstacle une case sur 3.</p>
<p>Idée 4 : au moins un obstacle pour chasser une bête. Quand on a 8 bêtes, il faut au moins 8 pièges.</p>	<p>Idée 7 : $25 \div 3 \approx 8,333... 8$ obstacles.</p>
<p>Idée 8 : (un peu la même que l'idée 5) Pour empêcher les bêtes de se poser en position horizontale, on place une colonne d'obstacles, et pour les empêcher de se poser en position verticale, on place une ligne d'obstacles (au milieu). On enlève ensuite la case du milieu (qui ne sert à rien).</p> 	<p>Idée 3 : $24 \div 3 = 8$.</p>

Tableau 2 : Affiches réalisées avec les élèves lors de la mise en commun des « idées » sur la bête « trimino long ».

Le passage à la bête « trimino en L » va permettre de finaliser la validation des « idées ».

Les élèves face à la bête « trimino en L »

La technique utilisant le pavage du territoire par les bêtes, à ce stade de la situation, est bien installée : « On a recouvert le plateau de jeu de bêtes et on peut en mettre 8, et pour ces 8 bêtes il faut 10 pièges. 9 est impossible avec les bêtes trimino L. » (CM1).

On retrouve des arguments portant sur les lignes et les colonnes :

Pour la solution à 10 nous avons fait 2 lignes verticales pour empêcher les triminos en L de se poser. Nous avons aussi trouvé que les bêtes triminos occupaient 2 lignes et que pour cela il fallait mettre des obstacles sur toute une ligne et qu'il fallait faire 1 ligne sur 2. (CM1).

Dans tous les cas, la nécessité d'utiliser « au moins » dans les formulations apparaît de manière franche (image 2), y compris dans les arguments mobilisant la division, et notamment dans la comparaison entre ce qu'il se produit pour la bête « trimino long » (pavage à 8 bêtes et solution à 8 obstacles) et la bête « trimino en L » (pavage à 8 bêtes mais solution à 10 obstacles) : « On

¹¹ La numérotation des idées se fait dans la continuité des affiches précédentes. Les idées de la bête « domino » sont mises à l'épreuve (consigne explicite) lors de la mise en commun de la bête « trimino long ».

peut utiliser la division mais on peut remarquer que pour les triminos en long on en pose 8 au moins alors que pour les triminos en L on en met 10 au moins (...). » (CM2), et « Pour la bête trimino long, nous avons fait une division $25 \div 3 = 8,333\dots$. On apprend qu'on doit au moins 8 obstacles. Pour la bête trimino en L, la division ne marche pas car ça n'a pas la même forme. » (CM2).

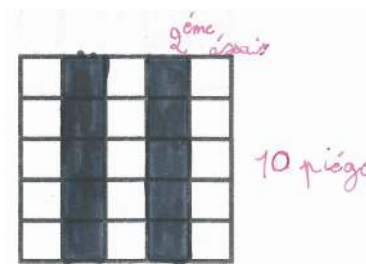
En conclusion : « La division nous permet de savoir combien il faut d'obstacles au moins. » (CM2).

1^{er} essai : nous avons mis les pièges horizontalement (10 pièges).



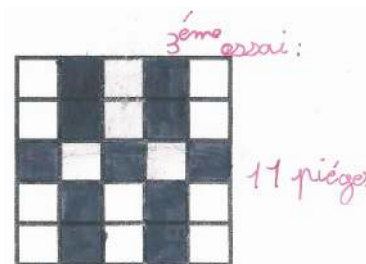
2^{ème} essai : nous avons mis les pièges verticalement (10 pièges).

Sachant que pour chasser une bête trimino en « L » il faut au moins « 1 » (un) piège voire parfois « 2 » ce qui empêcherait la bête de ne pas du tout pénétrer sur la surface.



3^{ème} essai : nous avons aussi essayé de mettre des obstacles une fois sur deux mais ce serait moins bien car il faut 12 ou 13 obstacles (comme la bête domino). Ce qui est bizarre, c'est qu'on a 8 bêtes et 10 obstacles.

On a fait une autre solution, la voici (3^{ème} carreau¹²).



4^{ème} essai : pour chasser 8 bêtes il faut au moins 8 obstacles. »

Image 2 : Trois procédures différentes pour la bête « trimino en L ».

Sur les affiches réalisées dans les deux classes à l'issue de la recherche sur la bête « trimino en L », il ressort différentes « idées » présentées dans le tableau 3 ci-après.

À l'issue de ce travail, les idées majeures qui demeurent et vont permettre aux élèves de rédiger les résultats de leur recherche, concernent : l'« argument P » présenté dans l'analyse *a priori* de la situation, l'argument concernant la division, un argument portant sur les lignes et les colonnes adaptable suivant le type de trimino. L'idée 9 n'a pas débouché sur une preuve, ce qui était pourtant possible en passant par une liste exhaustive de tous les cas possibles (cf. l'analyse *a priori*) : du temps supplémentaire aurait peut-être permis l'émergence d'une preuve basée sur l'idée 9, mais plus probablement en cycle 4.

Lors de la phase de préparation des résultats en vue de l'écriture de l'article, l'une des consignes

¹² Il faut comprendre « 3^e carré » dessiné sur le côté.

était de reprendre les « idées » produites lors des séances de recherche (tableaux 1, 2 et 3 ci-dessus) et d'évaluer leur portée, la question sous-jacente étant la généralisation possible de celles-ci.




Affiche CM1	Affiche CM1/CM2
<p>1 solution à 10. Conjecture : 10 est la meilleure solution. 1 solution à 11.</p>	<p>Solution à 10 : </p> <p>Solution à 11 : </p> <p>Quelles idées fonctionnent pour la bête trimino en L ?</p>
<p>Idée 1 : on obtient 12 ou 13, c'est trop¹³.</p>	<p>Idée 2¹⁴ : ne permet pas de trouver la meilleure solution (mais bonne idée pour chercher des solutions).</p>
<p>Idée 3 : si on recouvre le terrain, on a 8 bêtes.</p>	<p>Idée 4¹⁵ : non</p>
<p>Idée 4 : il faut AU MOINS 8 obstacles.</p>	<p>Idée 5 : un obstacle par bête ne suffit pas pour le trimino en L. Attention : on met AU MOINS un obstacle pour chasser une bête.</p>
<p>Idée 9 : pour chasser la bête il faut 2 obstacles.</p> 	<p>Idée 6¹⁶ : non</p>
<p>Idée 6 : on obtient 12 ou 13 obstacles¹⁷.</p>	<p>Idée 7 : le résultat de la division nous indique le nombre maximum de bêtes.</p>
<p>Idées 5 - 8 : la bête trimino en L occupe 2 lignes. On bloque 1 ligne sur 2.</p>	

Tableau 3 : Affiches réalisées avec les élèves lors de la mise en commun des « idées » sur la bête « trimino en L ».

¹³ L'idée 1 est barrée avec l'accord de tous.

¹⁴ Il s'agissait de mettre le moins possible d'obstacles sur les bords.

¹⁵ Il s'agissait d'inverser la coloration des cases pour trouver une meilleure solution à partir d'une solution (idée qui fonctionnait dans le cas de la bête « domino » pour passer de la solution à 13 obstacles à la solution à 12 obstacles).

¹⁶ Il s'agissait de placer un obstacle 1 case sur 3.

¹⁷ L'idée 6 est barrée avec l'accord de tous.

Les élèves ont correctement identifié cette tâche pourtant mathématiquement complexe et ont repris chacune des idées (principalement des propriétés) formulées pour des bêtes spécifiques : leurs discussions ont porté sur la possibilité d'utiliser ces « idées » pour les autres bêtes travaillées dans les séances. Ce travail a conduit au rejet de certaines « idées » et à la mise en avant d'autres. Il a été réalisé en parallèle du travail de rédaction de preuves. Cela étant, une séance spécifique sur ce thème aurait pu être envisagée afin de donner davantage de place au processus de validation. Ici, au vu des propriétés déjà mises en évidence par les élèves lors des quatre séances précédentes, il a été décidé d'attribuer une responsabilité spécifique à chaque groupe : en effet, certaines des « idées » étaient déjà des éléments suffisamment consistants de preuve et permettaient la rédaction de preuve. Il restait donc à faire un travail de tri sur les affiches pour la présentation des résultats de la classe en deux parties : les « idées » conservées car mathématiquement correctes, et les preuves.

Certaines « idées » ont été gardées mais n'ont pas nécessairement conduit à la rédaction d'une preuve. Les groupes s'étant le plus appropriés les « idées » permettant la rédaction d'une preuve ont donc conduit ce travail de rédaction.

Les différentes parties travaillées pour la rédaction de cet article

Habituellement, dans les SiRC, trois tâches de formulation et de rédaction apparaissent pour la préparation d'une séance de présentation du travail des élèves :

- énoncer le problème et la/les questions posée(s),
- énoncer les résultats,
- prouver ce qui a été découvert lors de la recherche.

Le travail de rédaction de cet article a été présenté aux élèves, en détail, de la façon suivante : il a été explicité aux élèves qu'un article était composé de plusieurs parties. Pour le cas de « La chasse à la bête », les parties à rédiger étaient :

- la présentation de l'origine de ce genre de problème (polyminos),
- la présentation du travail de recherche réalisé en classe,
- la présentation des résultats des élèves,
- et les conclusions.

Pour « prouver ce qui a été découvert dans la recherche », nous avons demandé aux CM1 et CM1/CM2, pour « La chasse à la bête », de :

- donner les « idées » qui « marchent »,
- expliciter les « idées » que l'on « garde »,
- montrer comment on obtient les conclusions.

Pour la classe de CM1, au regard des productions des élèves, les tâches des sept groupes ont été définies par le chercheur, en début de séance 5, de la façon suivante :

- un groupe a travaillé sur la présentation du problème posé à la classe (objets en jeu, questions posées) ;
- un groupe a eu la responsabilité de faire la liste des résultats validés par la classe ;
- un groupe a fait la liste des idées trouvées et de celles qui ont été gardées par la classe

pour les trois types de bête (à partir des affiches réalisées à l'issue de la recherche effectuée pour chaque type de bête) ;

- deux groupes ont travaillé sur la preuve pour la bête « domino » et la bête « trimino long » (en particulier, sur l'argument « au moins ») ;
- deux groupes ont travaillé sur la preuve pour la bête « trimino en L » (en particulier, sur l'utilisation de l'argument « au moins » et sur les arguments portant sur les colonnes/lignes).

La répartition des tâches pour la classe de CM1/CM2 a été un peu différente, les recherches des élèves n'étant pas de même nature. Ainsi, les tâches ont été réparties de la façon suivante pour les six groupes de cette classe, par le chercheur, en début de séance 5 :

- un groupe a travaillé sur la présentation du problème posé à la classe (objets en jeu, questions posées) ;
- un groupe a eu la responsabilité de faire la liste des résultats validés par la classe ;
- un groupe a établi la liste des idées trouvées et de celles qui ont été gardées par la classe pour les trois types de bête (à partir des affiches réalisées à l'issue de la recherche effectuée pour chaque type de bête) ;
- deux groupes ont rédigé ce que l'on peut conclure avec l'idée « division » ;
- un groupe a rédigé ce que l'on peut conclure quand on pave le terrain avec le maximum de bêtes possible.

Le travail de rédaction des élèves réalisé pour cet article est résumé ci-après, et décrit parfois dans le détail, sans différenciation explicite de niveau de classe, car il s'agissait d'un travail dont la visée était la production de résultats pour cet article.

Présentation du problème

Selon les groupes, la présentation du problème a été réalisée avec ou sans représentation des objets en jeu. Dans la mesure où tous les élèves connaissaient le problème, il s'est surtout agi de l'évocation du matériel (pas de généralisation du problème envisagée), proche de l'activité concrète de manipulation. Un travail sur un temps plus long sans le matériel de manipulation aurait peut-être permis une présentation plus générale du problème.

Sans dessin :

- *Matériel : un plateau de 25 cases vertical et horizontal. 25 pièges. Des bêtes domino, trimino en L, trimino.*
- *La règle du jeu : il faut que la bête domino ou trimino ou trimino long dans le plateau de 25 carrés ne puisse pas rentrer. On a besoin de mettre des pièges. Il faut mettre le moins de pièges.*

Avec des représentations des bêtes utilisées :

- Dans ce problème, on a utilisé la bête domino qui prend deux cases.*
- On a aussi utilisé la bête trimino long qui prend 3 cases.*
- Nous avons utilisé la bête trimino en L.*

Liste des résultats validés par la classe

Ici, il s'agissait de reprendre les solutions trouvées pour chaque type de bête.

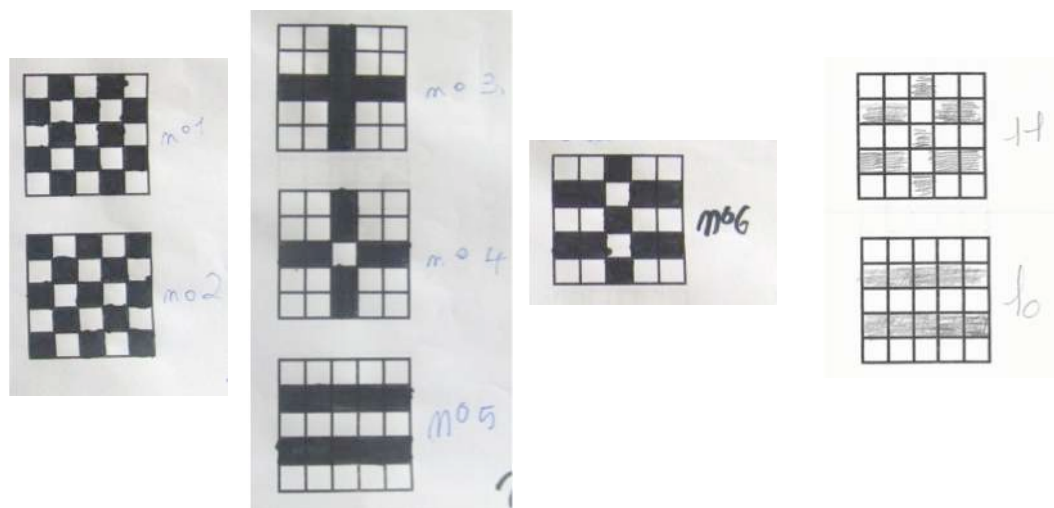


Image 3 : Solutions pour les trois types de bête étudiés.

Liste des « idées » reproduite par les élèves

L'enjeu ici est de juger de la validité des idées produites. Ce travail a été fait oralement lors de la rédaction des affiches portant sur la bête « trimino en L ». Nous ne reproduisons pas l'ensemble de ces éléments ici (cf. tableaux 1, 2 et 3 dans les pages précédentes). Un groupe a reproduit les affiches en réorganisant les idées dans l'ordre de leur numérotation. D'autres groupes ont indiqué clairement les idées qui ne fonctionnaient pas pour certains types de bête.

Preuve de la solution à 12 pour la bête « domino »

Voici deux exemples de rédaction pour traiter la preuve pour la bête « domino ».

Que peut-on conclure lorsque l'on recouvre le terrain avec les bêtes ?

Quand on chasse les bêtes domino on trouve une solution à 12, c'est la meilleure solution pour l'instant. Les bêtes domino on peut en poser 12 maximum, il faut au moins 1 obstacle par bête, du coup 12 dominos, il faut au moins 12 obstacles.

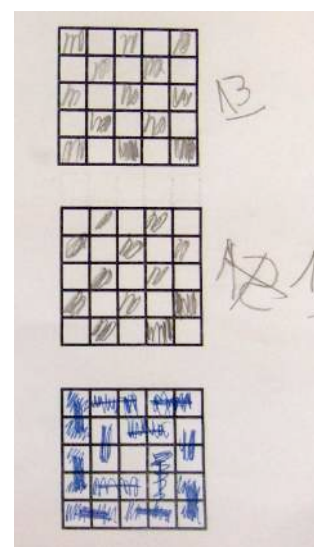
Avec les triminos, 1 obstacle par bête ne marche pas, il faut 2 obstacles par bête.

Autre rédaction :

Pour justifier la réponse à 12 pièges, on a dû utiliser l'idée 4, c'est-à-dire qu'il faut au moins 1 piège pour 1 bête. On a vu que 12 est un nombre pair et 13 est un nombre impair. En recouvrant le terrain de bêtes, nous avons trouvé la solution à 12.

Et avec l'argument mobilisant la division :

$25 \div 2 = 12,5$ avec la bête domino. Cela nous apprend qu'on doit au moins avoir 12 obstacles.



Preuve de la solution à 8 pour la bête « trimino long »

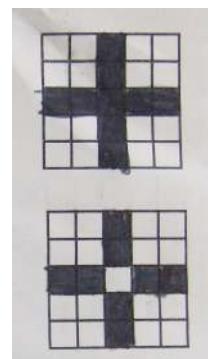
Les rédactions (ci-après) des élèves soulignent que les arguments sont effectivement bien identifiés, mais que leur hiérarchie et leur utilisation pour le travail de preuve le sont moins. Cela étant, il s'agit effectivement de preuves au sens mathématique, preuves sur lesquelles il serait possible de poursuivre le travail.

Nous allons vous prouver que la solution à 8 pièges est la meilleure pour chasser la bête trimino long. (...)

Idée 4 : sachant que pour chasser une bête il faut au moins un piège.

Idée 8 : la meilleure façon de chasser la bête trimino long, c'est la croix.

Explication : on empêche la bête de se poser verticalement donc on met les pièges horizontalement. On empêche la bête de se poser horizontalement donc on met les pièges verticalement.



Début de preuve de la solution à 10 pour la bête « trimino en L »

Dans le cas de la bête « trimino en L », nous pouvons parler de début de preuve, car cela n'a pas été complètement finalisé au niveau du processus de preuve lui-même, ni donc de la rédaction.

Un groupe a identifié le problème posé géométriquement par la forme de la bête « trimino en L » et a remarqué que, parfois, il fallait deux obstacles pour chasser cette bête, en raisonnant sur le terrain 2×2 .

La bête trimino en L prend 2 lignes. Ce qui nous a permis de trouver une solution à 10. Pour la trouver, nous avons fait une ligne sur deux. Nous avons sauté la première ligne pour que ça ne fasse que deux lignes de 5 carreaux et non 3×5 carreaux.

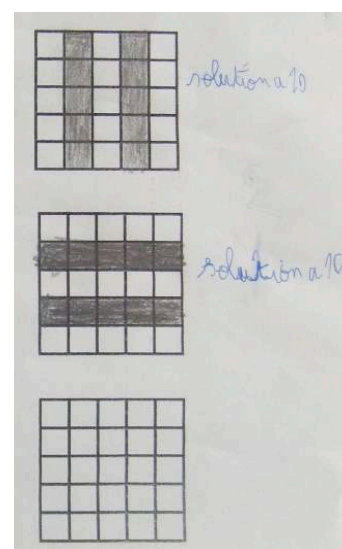
Dans une solution de triminos en L, nous sommes obligés de mettre deux obstacles pour une bête. Preuve :

Sur un terrain de 4 cases,

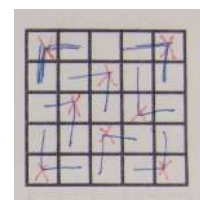


mais parfois 1 obstacle suffit.

Nous sommes sûrs que 8 est impossible car il y a 8 bêtes et que des fois il faut 2 obstacles.



L'argument « 2 obstacles par bête » est aussi apparu dans les conclusions d'un autre groupe avec le schéma ci-contre.

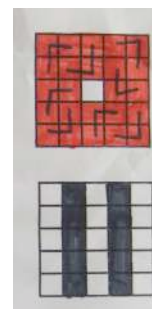


Un autre groupe a raisonné à partir du pavage par les bêtes et du nombre minimum d'obstacles :

Le trimino en L occupe 3 cases. Nous pouvons mettre 8 bêtes et il restera une case. Pour les obstacles nous avons trouvé deux lignes : solution à 10 pièges.

Il faut au moins 8 obstacles pour bloquer. La solution est entre 8 et 10.

On ne peut pas trouver mieux que 10 : on est sûr parce qu'on n'a pas trouvé de solution à 9.



L'argument sur la division

Cet argument, très rapidement apparu dans l'une des deux classes, a été difficile à négocier, car les élèves ont longtemps été persuadés que le résultat de la division du nombre de cases du territoire par la taille de la bête permettant d'obtenir le nombre minimum d'obstacles. Les extraits ci-après montrent l'évolution qu'une discussion sur le « au moins » a permise.

- $25 \div 2 = 12,5$ avec la bête domino. Ça nous apprend qu'on doit avoir au moins 12 obstacles.
- Pour la bête trimino long, nous avons fait une division : $25 \div 3 = 8,333\dots$. On apprend qu'on doit avoir au moins 8 obstacles.
- Pour la bête trimino en L, la division ne marche pas car ça n'a pas la même forme.
- La division nous permet de savoir combien il faut d'obstacles au moins.

Il n'a pas été possible de revenir sur cet argument et sur son domaine de validité, faute de temps : une ouverture du problème avec un changement de forme du territoire (carré puis rectangulaire) l'aurait permis.

Conclusions et perspectives

Cette situation « La chasse à la bête » a fonctionné en cycle 3 (du fait de l'implication des élèves et de leurs productions), au niveau de l'activité de recherche, et a effectivement initié une démarche de recherche et de preuve chez les élèves. Ces derniers ont bien identifié le travail de manipulation, d'observation, de recherche de solutions, et de formulation idées. Les élèves ont été confrontés au doute, et à la structuration d'une démarche de recherche (essais, formulation d'idées, mises à l'épreuve, confrontation aux idées des autres, etc.).

La gestion du travail d'argumentation et de preuve des élèves

Les problèmes d'optimisation sont particulièrement difficiles en mathématiques et c'est là un point central dans la situation de « La chasse à la bête ».

Au niveau de la gestion des deux classes dans l'expérimentation réalisée, deux aspects directement en lien avec la démarche de preuve ont été induits par le chercheur :

- 1) La complexité du raisonnement pour trouver une borne inférieure et montrer que c'est le minimum est réelle : l'argument nécessitant le « au moins » a été induit à partir des idées proposées par les élèves. Ceci est très vraisemblablement une spécificité du niveau de classe de primaire. Cela souligne en particulier l'importance de la gestion des SiRC et la difficulté à identifier le meilleur moment — en général le plus tard possible — pour induire

des éléments qui représentent une difficulté centrale dans le traitement du problème mathématique. Sur un temps plus long, on peut faire l'hypothèse qu'un travail approfondi, sur la bête « trimino en L » d'une part, et sur l'argument mobilisant la division d'autre part, aurait pu permettre l'émergence de la nécessité du « au moins » dans les formulations. Il s'agit, d'une manière générale, d'étudier les domaines de validité d'idées des élèves pour travailler explicitement sur la formulation et la mise à l'épreuve de conjectures. Cela n'a pas pu être mis en œuvre dans l'expérimentation, faute de temps.

2) La mise à l'épreuve des idées formulées lors de la première situation avec les bêtes « domino » : le chercheur a explicitement indiqué aux élèves, lors du travail avec les autres bêtes, que les idées présentées dans les affiches pour la bête « domino » pouvaient (et devaient) être mises à l'épreuve avec les autres bêtes. Ce choix s'explique du fait de la faible fréquentation de ces élèves avec les démarches de recherche et de leur jeune âge (entre 9 et 11 ans).

Cette expérimentation marque une activité de recherche en mathématiques isolée dans le cursus de ces élèves ; il s'agit davantage d'une initiation à la démarche de recherche qu'un travail filé sur celle-ci. On peut faire l'hypothèse qu'une fréquentation plus grande de SiRC peut permettre aux élèves d'identifier plus en profondeur les heuristiques propres à la démarche de recherche (déjà soulignées par Godot (2005, 2006)) : exploration du problème et organisation de celle-ci, formulation d'idées — et de conjectures — (importance ici de la mémoire de la recherche et des traces écrites), mises à l'épreuve de conjectures, argumentation, passage à l'écrit et modélisation pour s'abstraire de la manipulation du matériel, formulation des résultats, même locaux, rédaction de preuves. Par ailleurs, le travail visé sur l'argumentation a été abouti par la formulation et la mise à l'épreuve des « idées » des élèves, mais serait à approfondir pour accéder véritablement à la preuve (statut et enjeux). Les élèves eux-mêmes ont perçu la distance entre les arguments produits et la rédaction de la preuve attendue, mais le format de cette preuve était étranger et assez obscur pour eux, ce qui est tout à fait normal étant donné le contexte et leur âge. Au niveau didactique, concevoir une progression pour permettre cette transition entre argumentation et preuve constitue un travail de recherche à part entière (nous ne reviendrons pas ici sur l'ensemble des travaux en didactique sur la question de l'argumentation, de la preuve et de la démonstration : ruptures ou continuité ?) et cela nécessite des expérimentations régulières sur un temps long : la question, ouverte, sous-jacente, est de savoir si les SiRC peuvent permettre un tel apprentissage de la preuve et comment les enrichir par d'autres types de situations.

Robustesse de la situation et prolongements

La SiRC composée d'un territoire 5×5 et des trois bêtes (choix des valeurs des variables de recherche de cette situation) a montré par le passé sa robustesse dans le secondaire et l'enseignement supérieur, et ici dans deux classes de primaire. D'autres choix de valeurs pour ces variables de recherche pourraient être expérimentés afin de construire une progression sur un temps plus long pour une initiation à la démarche de recherche et à la preuve au primaire. Cela est à mettre en regard avec d'autres SiRC déjà utilisées à ce niveau d'enseignement (Godot, 2006 ; Gravier, Payan & Colliard, 2008).

Le mot de la fin est laissé aux élèves : « *On a beaucoup travaillé en équipe, on a aussi appris à mieux s'écouter les uns les autres. (...) On a observé (...) Puis on a essayé (...) Et on a trouvé (...)* ».

Références bibliographiques

- ARSAC, G., GERMAIN, G. & MANTE, M. (1988). *Problème ouvert et situation-problème*. IREM de Lyon.
- BROUSSEAU, G. (1998). *La théorie des situations didactiques*. La Pensée Sauvage, Grenoble.
- DORBEC, P. (2007). *Empilements et recouvrements*. Thèse, Université Joseph Fourier, Grenoble. Disponible en ligne : <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00181722/fr/> (consulté le 4 juin 2016).
- GODOT, K. (2005). *Situations recherche et jeux mathématiques pour la formation et la vulgarisation*. Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble. Disponible en ligne : <https://halshs.archives-ouvertes.fr/tel-00102171/document> (consulté le 4 juin 2016).
- GODOT, K. (2006). La roue aux couleurs : une situation-recherche pour apprendre à chercher dès le cycle 3. *Grand N*, 78, 31-52.
- GOLOMB, S.-W. (1994). *Polyominoes - Puzzles, Patterns, Problems and Packings*. Princeton Science Library, Princeton, NJ.
- GRAVIER, S. & PAYAN, C. (2001). On the pentomino exclusion problem. *Discrete and Computational Geometry*, 26, 375-386.
- GRAVIER, S., PAYAN, C. & COLLIARD, M.-N. (2008). Maths à Modeler - Pavage par des dominos. *Grand N*, 82, 53-68.
- GRENIER, D. & PAYAN, C. (2003). Situations de recherche en « classe » : essai de caractérisation et proposition de modélisation. In Durand-Guerrier V., Tisseron C. (Eds) (pp. 189-205) *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*. Paris : IREM de Paris 7, ARDM.
- GRENIER, D., BACHER, R., BARBE, H., BICAÏS, Y., CHARLOT, G., DECAUWERT, M., DERAUX, M., GEZER, T., MEILHAN, J.-B. & MOUTON, F. (2016). *Situations de recherche pour la classe - Pour le collège et le lycée... et au-delà*. IREM de Grenoble.
- MEN (2015). Programmes d'enseignement de l'école élémentaire et du collège. Bulletin Officiel, spécial n°11 du 26 novembre 2015.

Annexe 1

Chasse à la bête « trimino long » sur un carré 5×5

Une deuxième preuve : nous pouvons construire une autre preuve en utilisant des arguments sur les lignes et les colonnes du territoire. Étudions quelle est la (ou les) case(s) devant contenir un obstacle sur une colonne et poursuivons le raisonnement sur les colonnes suivantes.

Pour empêcher la bête de se poser sur une colonne, il nous faut au moins un obstacle. Si nous ne plaçons qu'un obstacle sur cette colonne, il nous faut le placer sur la case « du milieu » (notons cet argument « ⊗ »). Nous pourrions utiliser le même argument sur les lignes.

Il nous faut donc au moins 5 obstacles pour les cinq colonnes qui composent notre territoire. Mais des bêtes peuvent encore se poser, ce n'est donc pas une solution.

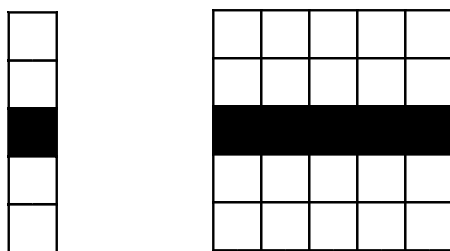


Figure 6 : Première étape du raisonnement sur les lignes et les colonnes.

Nous savons donc qu'il nous faut au moins 6 obstacles. Avec 6 obstacles, quatre colonnes auront un obstacle chacune (placé au milieu, toujours avec l'argument « ⊗ ») et la colonne restante en aura deux. Ainsi, il y a au moins deux obstacles répartis sur 4 lignes et quatre obstacles sur une ligne. Ce qui est encore insuffisant. Nous remarquons que si l'on place un obstacle sur chacune de ces lignes, on trouve la première solution à 8 obstacles (figure 4, p. 9).

Nous savons maintenant qu'il nous faut au moins 7 obstacles. Supposons qu'une solution à 7 obstacles existe. Dans une telle solution, au moins 3 colonnes contiennent exactement un obstacle, placé au milieu. Ces trois colonnes ne peuvent pas être consécutives, car sinon, une bête pourra se poser. Si deux de ces colonnes sont consécutives, alors chaque colonne adjacente doit contenir au moins 4 obstacles pour empêcher la bête de se poser. 4 obstacles sur une colonne et au moins un obstacle pour chacune des autres colonnes donnent 8 obstacles, ce qui est trop (nous raisonnons en effet sur une solution à 7). Ainsi, les colonnes comprenant un obstacle ne sont pas adjacentes : ce sont les colonnes 1, 3 et 5. En utilisant l'argument « ⊗ » sur les lignes, cela implique que chaque ligne, exceptée celle du milieu, a exactement un obstacle. Ce n'est pas possible quand la colonne du milieu a un obstacle seulement. Nous ne pouvons donc pas trouver une solution à 7 obstacles.

Ainsi, 8 obstacles sont nécessaires. Cette preuve, par étude des cas possibles, est particulièrement longue.