NOTION DE LIMITE ET DÉCIMALISATION DES NOMBRES RÉELS.
LE CAS DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE AU VIÊT NAM[1]

LE THAI BAO Thien Trung
Université Pédagogique de Ho Chi Minh Ville (Viêt Nam)

Résumé. Dans cet article nous abordons la question des relations entre la notion de limite et la décimalisation des nombres réels. Dans une première partie nous montrons que la construction de la notion de limite ne peut éviter le problème de la décimalisation des nombres réels et de leur écriture décimale, y compris du point de vue épistémologique. Puis au travers des réponses à un questionnaire, nous analysons les conséquences de l'état d'un système éducatif particulier, celui du Viêt Nam, sur la signification des écritures décimales illimitées dont l'ensemble est pour cette institution l'ensemble des réels.

Mots-clés. Ecriture décimale, nombre réel, ordre dense, ordre discret (N), algèbre de limites, problématique de l'approximation.

Introduction

Des études menées au lycée en France (Trouche 1996), en Espagne (Bosch et al. 2002), au Viêt-nam (Le Thai Bao 2004), montrent que la principale raison d'être de la notion de limite enseignée au Lycée est de répondre à la question du calcul algébrique des limites des fonctions en un point ou à l'infini, en partant de la supposition que ces limites existent ou sont infinies. Nous parlerons *d'algèbre des limites.* Dans cette algèbre, la question de l'existence de la limite n'est pas posée et le type de tâche prédominant pour les élèves est de la forme :

« Calculer $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ »

où a est de façon quasi exclusive (dans l'institution vietnamienne) soit un entier soit une racine carrée d'entier $\sqrt{n}$ soit l'infini et $f(x)$ est une fonction numérique à variable réelle classique (pour le lycée), donnée par une formule algébrique.

Pour obtenir des éléments d'information sur les effets de l'algèbre des limites sur le rapport des élèves à la notion de limite nous avons demandé à des élèves de Terminale[2] :

Rédiger un message pour expliquer à un élève de 10ième ce que signifie $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$

95 des 131 élèves interrogés (73 %) sont incapables d'expliquer ce qu'est une limite et se contentent d'indiquer le calcul à effectuer pour trouver la limite. Une élève ajoute même : « voilà, on peut résoudre ce problème sans rien comprendre à limite ».

1 Cet article s'appuie sur Lê Thai Bao T. T. (2007)
2 131 élèves de trois classes de Terminale à Ho Chi Minh Ville

1. L'approximation décimale peut-elle donner du sens à la notion de limite ?

Le point de vue de l'approximation numérique a permis historiquement la stabilisation du concept de limite aujourd'hui et lui a donné son sens actuel.

> […] ce qui a conduit à la prédominance de ce point de vue (d'approximation), c'est sa valeur opératoire et son efficacité dans les démonstrations de l'analyse […]. (Bkouche 1996)

De ce point de vue, le degré d'approximation que l'on veut pour *f(x)* au voisinage de la limite fixe le degré d'approximation de la variable :

> La définition en (η, ε) n'est autre qu'une systématisation de cette notion d'approximation. (op. cité)

Nous avons posé le problème suivant à des élèves d'une classe 11 (équivalente à une première S) après enseignement de la notion de limite.

Soit f une fonction définie par $f(x)=\dfrac{x^2-0,1x-0,02}{0,25x^2-0,01}$.
Proposer un couple (x ; $f(x)$) tel que $f(x)$ soit le plus proche possible de 3.

La classe a été divisée en 10 groupes de 4 élèves, une moitié travaillant avec $x < 0,2$ et l'autre avec $x > 0,2$.

Commentaires pour le lecteur :

- $\lim_{x \to 0,2} f(x)=3$
- et la fonction f est prolongeable par continuité en $x = 0,2$ et strictement croissante sur chacun des intervalles de son domaine de définition.

Les élèves proposent comme meilleurs couples des écritures décimales limitées, des fractions et des écritures décimales illimitées. L'ordre discret hérité de $\mathbb{N}$ (au sens de Brousseau 1987) règne dans $\mathbb{R}$ comme ensemble des écritures décimales *que nous notons* **D**∞. Quatre groupes (sur 10) de la classe observée ont produit des couples (x ; $f(x)$) en « écriture décimale illimitée ». Nous les donnons dans le tableau 1 ci-après.

Type 1	Type 2	Type 3	Type 4
0,1(9) et 2,(9)[3]	0,19999…et 2,9999…	0,199(9) et 2,9(9)7	0,2(0)1 et 3,(0)1

Tableau 1. *Types d'« écriture décimale illimitée »*

Pour ces élèves, le nombre 0,1(9) (ou 0,1999…, écriture décimale illimitée ayant 9 comme période *notée EDIP9*) est le plus proche de 0,2 et inférieur strictement à 0,2 (ordre discret dans **D**∞). De plus, pour certains élèves, cette écriture est celle d'un irrationnel comme le montre l'interaction entre les élèves d'un groupe :

E1: Avec le nombre 18/90 ?
(d'après le brouillon : 0,1(9) = 0,1 +0,9 x 0(1)=1/10+9/90=18/90)
E2: Ce nombre est le plus proche de 0,2 ? (moqueur, car 18/90 = 0,2)
E1: Alors, le nombre le meilleur est 17/90.
E3: Non. Le nombre zéro virgule un neuf neuf neuf … est plus intéressant
E1: Non. Le nombre 17/90, parce que si on prend 0,1999…, on ne peut pas savoir quelle est la

3 Nous adoptons dans tout l'article cette notation propre à l'enseignement secondaire au Viêt Nam. Il existe une autre notation propre l'enseignement secondaire en France : $2,\overline{9}$, La notation « 2,9…. » est présente dans les deux institutions.

fraction. Si on prend 0,1999…, c'est un nombre irrationnel
E2: Cet irrationnel, c'est combien?
E1: Cet irrationnel, nous ne savons pas comment le représenter. Donc, nous l'écrivons 0,1(9)
(Extrait des lignes 12 à 19 du protocole du groupe 1 composé des 3 élèves H, V et B)

Ils produisent aussi une sorte d'infini - fini activée dans les écritures décimales illimitées comme 3,(0)1.

P : et que signifie cette écriture ?
E : Il y a une infinité de zéro et 1 à la fin.

Cet épisode montre qu'une construction cohérente de la notion de limite ne peut pas éviter une (re)construction des nombres réels, en particulier ne peut pas éviter le problème de la décimalisation des nombres réels, outillée par les concepts de l'analyse et mettant au centre de cette reprise les écritures décimales illimitées. Cela nous conduit à interroger les mathématiques et leur histoire : quelles relations entretiennent la notion de limite, la construction des nombres réels et la décimalisation des nombres réels ?

2. Notion de limite, constructions et décimalisation des nombres réels

Dans l'histoire des mathématiques, il existe une relation dialectique dans l'évolution du statut des nombres réels et de la notion de limite : les progrès de la notion de limite ont été nécessaires à ceux de la notion de nombre réel, et inversement, les progrès de la notion de limite se sont nourris de ceux de $\mathbb{R}$.

Dans le cadre de cet article, nous nous centrerons sur l'aboutissement de cette histoire, pour tenter de caractériser le rôle de la notion de limite dans les constructions modernes des nombres réels à la fin du 19e siècle. Nous examinerons aussi la place de la droite dans ces constructions ainsi que celle des EDI.

2.1 Constructions de $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$ en leur relation avec la notion de limite

Le perfectionnement de la notion de limite par Cauchy (1821) et son critère de convergence d'une suite numérique (critère de Cauchy[4]) fondent la construction moderne de $\mathbb{R}$ par Cantor (1872) : celle-ci s'appuie sur l'existence de la limite pour toute suite *rationnelle* satisfaisant au critère de Cauchy (complétude du nouvel ensemble $\mathbb{R}$). La relation dialectique se cristallise dans l'unification de la notion de nombre réel et de la notion de limite : un nombre réel est défini par une classe de suites de rationnels équivalentes[5] entre elles ; toutes les suites numériques d'une même classe d'équivalence admettent ce nombre réel comme limite.

En même temps que Cantor, Dedekind (1872) s'appuie sur l'existence des bornes supérieure et inférieure de tout intervalle borné non vide de nombres rationnels pour construire l'ensemble des réels ; cette existence équivaut à la convergence des suites de Cauchy ou des suites adjacentes (Bolzano 1817).

Les constructions de $\mathbb{R}$ de Dedekind et de Cantor partent de la théorie des ensembles et de connaissances arithmétiques sur les rationnels.

4 (x_n) est une *suite de Cauchy* si, pour tout $\varepsilon>0$, il existe un naturel $N>0$ tel que, pour tout $m, n \geq N$, $|x_n-x_m| < \varepsilon$.
5 *Relation d'équivalence* : $(x_n)\sim(y_n)$ si, pour tout rationnel $\alpha > 0$, il existe un naturel N : $\forall n \geq N \Rightarrow |x_n-y_n| < \alpha$.

	Dedekind	Cantor
Construction de ℝ	Par coupures[6] (C,C') de ℚ tels que C, C' non vides, $C \cup C' = \mathbb{Q}$ et $C \cap C' = \emptyset$ avec un ordre d'inclusion et les opérations ensemblistes[7].	Par classes d'équivalence des suites de Cauchy de rationnels avec une relation d'ordre[8] et les opérations sur les suites.
Caractéristiques	ℝ est un corps commutatif ordonné, archimédien et *complet*. L'infini de ℝ est appelé *puissance du continu*[9].	
Complétude (continu)	Propriété de la borne supérieure / inférieure (voir plus bas)	Propriété : toute suite de Cauchy est convergente.

Tableau 2. *Comparaison de constructions de R à partir de Q*

La définition axiomatique de ℝ par Hilbert (1899) a permis d'assurer la cohérence des constructions de ℝ. En utilisant la notion d'unicité à un isomorphisme près, elle permet de :

- montrer l'équivalence entre les constructions de Dedekind et de Cantor.
- valider d'autres constructions des réels et, en particulier, le modèle de la droite graduée.

Rappelons le système des axiomes définissant logiquement l'existence de ℝ. Une famille de nombres satisfaisant les quatre conditions (a), (b), (c), (d) ci-dessous, est unique à un isomorphisme près, et est appelée ensemble des nombres réels.

(a) un corps commutatif pour les deux lois +, × ;
(b) un corps totalement ordonné ;
(c) un groupe ordonné archimédien pour la loi + ;
(d) un système tel qu'il ne soit pas possible de l'agrandir en lui rajoutant des éléments de manière à obtenir un système vérifiant encore (a), (b), (c).

Dans cette axiomatisation, la complétude correspond à la condition (d) dont on ne voit pas directement la relation avec la notion de limite. On peut la remplacer par l'une des quatre propriétés équivalentes suivante :

- Tout partie non vide et majorée de ℝ admet une borne supérieure (resp. inférieure) (propriété de la borne supérieure).
- Toute suite de Cauchy est convergente.
- Toute suite monotone et bornée est convergente.
- Il existe un nombre réel unique appartenant à tous les segments de chaque famille de segments emboîtés.

On voit mieux ainsi que l'existence de ℝ est assurée par l'existence de la limite de suites numériques, soit de Cauchy, soit monotones bornées, soit adjacentes avec une autre suite. La structure de ℝ unifie les trois notions – suite numérique convergente, limite d'une suite numérique et nombre réel, un nombre réel étant déterminé par l'une des suites numériques qui converge vers lui.

---

6 Une *coupure* est un couple (C, C') d'ensembles des nombres rationnels tels que $\forall x \in C, \forall x' \in C', x < x'$.

7 *Ordre* : $(C_1, C'_1) \leq (C_2, C'_2)$ si $C_1 \leq C_2$.
Pour l'addition : $(C_1, C'_1) + (C_2, C'_2) = (C_3, C'_3)$, où $C_3 = \{x \in \mathbb{Q} : x = x_1 + x_2 \text{ où } x_1 \in C_1 \text{ et } x_2 \in C_2\}$. De la même façon, on peut définir la multiplication mais selon une règle des signes plus compliquée.

8 *Relation d'ordre* : $(x_n) \leq (y_n)$ si, il existe un naturel N tel que, pour tout $n \in N$, on a $x_n \leq y_n$.

9 La théorie des cardinaux de Cantor, opposant « dénombrable » à « non dénombrable », montre que l'infini de ℝ est plus « grand » que l'infini du dénombrable de ℚ.

2.2 Place de la droite réelle dans les constructions de Dedekind et Cantor

Aussi bien Dedekind que Cantor relient leurs constructions des nombres réels à partir de $\mathbb{Q}$ à la droite de la géométrie. Ils représentent d'abord les nombres rationnels sur la droite graduée. Dedekind (1872) fonde cette « corrélation » sur la mesure des longueurs.

> On sait que cette analogie existant entre les nombres rationnels et les points d'une droite devient une véritable corrélation quand on choisit sur la droite une certain point O, origine ou point zéro, et une certaine unité de longueur pour mesurer les distances. A l'aide de cette dernière, on peut construire pour tout nombre rationnel *a* une longueur correspondante […] et déterminer un point correspondant […] (Op. cité)

Dedekind met en avant l'existence d'une infinité de lacunes sur la droite graduée une fois représentés tous les nombres rationnels.

> Mais il est un fait de la plus haute importance : c'est qu'il existe sur la droite une infinité de points ne correspondant à aucun nombre rationnel… (Ibid.)

Pour Dedekind, la construction des coupures dans $\mathbb{Q}$ complète les lacunes de $\mathbb{Q}$ et assure la continuité de la droite graduée.

> Au paragraphe précédent, on attire l'attention sur le fait que tout point de la droite opère une division de celle-ci en deux portions telles que tout point d'une portion est à gauche de tout point de l'autre. Je trouve alors l'essence de la continuité dans la réciproque […] (Ibid.)

Quant à Cantor, chaque point sur la droite graduée correspond à au moins une suite de Cauchy des nombres rationnels. *L'axiome des segments emboîtés* sur la droite graduée assure, pour Cantor, l'existence des points (non rationnels) correspondant au nouveau nombre construit comme limite d'une suite de Cauchy de nombres rationnels.

Mais existe-t-il des constructions s'appuyant sur l'ensemble des nombres décimaux ? Quel statut ont ces constructions ?

2.3 Significations possible des EDI dans les constructions de $\mathbb{R}$

Nous résumons ici les contributions de Stevin (1585), Lebesgue (1931) et enfin Bourbaki (1960).

• *Stevin* (1585) utilise les nombres décimaux pour étudier d'autres nombres que les décimaux comme des fractions non décimales (ou des racines carrées) en s'appuyant implicitement sur la densité de **D** dans un sur–ensemble contenant les nombres constructibles : « *tous sont approchables par les nombres décimaux* ». D'après Dhombres (1978), Stevin représente les irrationnels par une écriture décimale illimitée (EDI) pour que l'on considère les irrationnels comme des nombres.

> L'ingénieur et mathématicien Simon Stevin, qui avait écrit un « Livre de compte de prince à la manière d'Italie » (1608), allait aider à mieux faire assimiler les irrationnels comme nombres par l'introduction de la représentation décimale. […] (Dhombres 1978, p. 129)

• *Le projet de Lebesgue* (1931) est de « *passer directement de la notion de nombre entier à celle du nombre le plus général sans avoir à utiliser les Rationnels ou, si l'on veut, à dégager ni celle de nombre décimal exact, ni celle de nombre rationnel* » (p. 11) par un procédé de comparaison. Nous résumons ci-dessous le procédé de comparaison de Lebesgue :

- comparer un segment AB avec un segment unité U_0 en le portant sur la demi-droite AB où le point A est origine.
- soit A_1 la dernière extrémité obtenue en portant *n* fois U_0, avant de dépasser B

> Si A_1 atteint B, on dira que la longueur de AB est n. Dans le cas contraire, on obtient un encadrement. Donc, B appartient au segment A_1B_1 où la longueur AB_1 est $n+1$ fois U_0. On découpe successivement l'unité U_n ($n = 0, 1, 2,\ldots$) en 10 parties égales pour obtenir une unité U_{n+1} avec laquelle on compare, « à chaque stade de la mesure », la longueur de A_nB_n (décachotomie successive des unités)

Lebesgue construit en fait une *suite de nombres décimaux* telle que « *chaque nombre est obtenu en écrivant un chiffre à la droite du précédent* » qui correspond à une suite des segments emboîtés AB, A_1B_1, A_2B_2… L'écriture décimale illimitée apparaît comme une suite croissante de nombres décimaux associés à une suite de segments de droite emboîtés qui assurent l'existence et l'unicité d'un nombre « le plus général ». Cependant, les *écritures décimales illimitées de période 9* (EDIP9) ne sont pas des nombres car ne peuvent pas résulter de son procédé de comparaison de segments. De telles suites sont donc à exclure, toutes les autres sont des nombres.

• *Examinons maintenant l'ouvrage de Bourbaki* (1960).

Dans le chapitre IV, l'ensemble des nombres réels est construit comme un espace topologique particulier ayant une structure algébrique et une structure d'ordre « prolongée de celle de $\mathbb{Q}$ ». Bourbaki définit antérieurement la notion de limite à partir de celle de filtre de voisinages dans l'espace topologique : c'est donc une notion de limite de point de vue topologique. Nous nous intéressons plus spécialement au paragraphe intitulé « Développement usuels des nombres réels ». Bourbaki présente dans ce paragraphe le développement des nombres réels relatifs à une suite de base (d_n) qui généralise la notion de base décimale.

Pour Bourbaki, le développement décimal attaché à la base a = 10 est réservé à l'action d'effectuer à la main des calculs numériques.

> Les suites de base les plus importantes sont celles où $d_n = a^n$, a étant un entier >1 ; on dit alors que a est le *nombre de base* (ou simplement la base) des développements correspondants. Pour les calculs numériques manuels, on emploie les développements de base 10, qui sont dits *développements décimaux* ; dans les calculs sur ordinateurs, on utilise le plus souvent les développements de base 2 (dites développements *dyadiques*). (Bourbaki 1960*,* p. 43)

L'écriture décimale illimitée est mise en relation avec la notion de valeur approchée.

> Pour représenter les valeurs approchées par défaut r_n d'un nombre $x \geq 0$, dans son développement de base a, on se sert du symbolisme suivant : on désigne chaque entier u tel que $0 \leq u \leq a-1$ par un signe particulier ; si $r_n = p_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{d_k}$, on écrit d'abord, à l'aide de ces signes, le développement de base a de l'entier positif $p_0 = [x]$ (E, III, p. 40), puis on place une virgule, et on écrit ensuite successivement les signes représentant les nombres $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Si S est le symbole ainsi obtenu, on écrit souvent, par abus de langage, x = S… ; il doit être entendu une fois pour toutes qu'une telle relation n'est qu'une manière abrégée d'indiquer que le second membre est la valeur approchée de x à $1/a^n$ *près par défaut*. (Ibid., p. 43)

Il existe ainsi deux représentations d'un même nombre réel x ($x = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{d_n}$ et x = S …) avec une mise en relation établie au sein de la notion de limite apparaissant sous forme d'une écriture de somme infinie. L'égalité « x = S… » est un abus de langage, l'écriture S… ne peut être qu'un abrégé de « $p_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{d_k}$ », valeur approchée de x à $1/a^n$ près par défaut. La seule égalité permise est $x = \lim_{n \to \infty} r_n$ et en cela Bourbaki relie l'écriture illimitée abusive à la limite de la suite numérique (r_n). Le problème de l'existence des nombres réels possédant deux développements est traité dans la *définition d'un nombre réel par son développement*. Selon ce traitement, on a : $1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n}$, la somme infinie à droite s'appelant développement décimal *impropre* du nombre 1. Cette dernière égalité est cohérente avec l'unicité de la limite dans $\mathbb{R}$.

Ainsi l'étude des traités de Lebesgue (1931) et Bourbaki (1960), permet de montrer l'existence de deux significations possibles pour les EDI dans la décimalisation des nombres réels. Un EDI représente :

- soit une suite particulière de décimaux satisfaisant un critère de convergence (axiome des segments emboîtés dans la construction de $\mathbb{R}$ chez Lebesgue),
- soit la limite de cette suite (développement décimal d'un réel chez Bourbaki).

Une telle suite de nombres décimaux satisfait plusieurs critères de convergence qui permettent la construction de $\mathbb{R}$ à partir de **D** : suite monotone bornée ; suite de Cauchy et suite adjacente à une autre suite. De plus, la décimalisation des nombres réels établit un lien entre approximation et limite.

Examinons maintenant l'état de la décimalisation des nombres réels dans *l'enseignement des mathématiques secondaire* (EMS) via les EDI.

3. Rapport aux écritures décimales illimitées des élèves du Lycée et des futurs enseignants de mathématiques au Viêt Nam

Dans le programme vietnamien en vigueur, l'ensemble des nombres réels est introduit, au niveau du collège, *comme l'ensemble des écritures décimales* (limitées ou illimitées) alors que les notions de suite convergente et de limite n'apparaissent au lycée qu'en classe 11 (Première en France). Les deux notions, nombre réel et limite, sont introduites de façon apparemment indépendante.

L'étude des nombres décimaux et de l'approximation décimale n'est pas objet d'enseignement dans l'EMS vietnamien actuel. Au lycée, on ne prend pas en compte la relation entre nombre et limite dans les écritures décimales alors que l'ensemble des ED représente théoriquement l'ensemble des nombres réels depuis le collège. Nous faisons donc l'hypothèse que les connaissances sur les ED dans EMS sont celles du Collège. L'étude des nombres décimaux ne se réalise qu'à l'école primaire sur des nombres décimaux positifs ayant au maximum 3 chiffres après la virgule. L'ordre dense (non discret) dans **D** n'est donc étudié à aucun niveau de l'EMS du Viêt-Nam.

Pour obtenir des informations sur le rapport aux EDI des élèves du Lycée et des futurs enseignants de Lycée, nous avons proposé un questionnaire[10] en septembre 2005 pour 174 élèves de Seconde (classe 10), 89 élèves de Terminale (classe 12) et 78 étudiants de la dernière année de deux écoles Normales Supérieures (ENS) d'Ho Chi Minh Ville.

Nous avons choisi dans la suite de faire précéder l'analyse des questions et des réponses par une brève présentation du contexte institutionnel dans lequel s'inscrit chacune des questions : en effet ce sont dans les conditions institutionnelles de l'enseignement de certains objets de savoirs que nous pouvons trouver des explications aux phénomènes observés.

10 Certains items de ce questionnaire s'appuient sur les questionnaires de Margolinas (1988) et Neyret (1995).

3.1 Périodicité de l'EDIP dans la division euclidienne généralisée[11]

La technique pour produire le développement décimal d'une fraction s'appuie sur la division euclidienne généralisée. Ci-après un extrait du manuel 6[12].

> Pour comprendre le nombre décimal illimité périodique, représentons la fraction $\frac{118}{55}$ en écriture décimale.
>
> | | |
> |---|---|
> | 118 | 55 |
> | 080 | 2,14545… |
> | 250 | |
> | 300 | |
> | 250 | |
> | 300 | |
> | 25… | |
>
> On voit qu'il est impossible de la représenter par un nombre décimal, parce que si l'on effectue encore la division, les chiffres 4 et 5 sont répétés dans le quotient. On obtient un nombre appelé nombre décimal illimité périodique 2,14545…
> Brièvement, on écrit 2,1(45). La notation (45) veut dire que les chiffres 4 et 5 (formant le nombre 45) sont infiniment répétés. Le nombre 45 s'appelle période du nombre décimal illimité périodique. (Math 6, vol 1, p. 68)

La périodicité n'est déduite ni de la propriété des restes d'une division euclidienne généralisée, ni de l'observation de cette répétition, mais de l'observation du comportement du quotient décimal approché. Cette absence de savoirs (dans l'institution) ne permet pas de justifier la notion de période d'un EDIP.
Nous formulons donc une règle du contrat didactique : l'élève n'est pas responsable de l'étude de la décimalité ou de la non – décimalité d'une fraction à écrire en écriture décimale. Dans la division euclidienne généralisée de deux entiers (génératrice de l'écriture décimale d'un rationnel), une succession de chiffres répétée 2, 3 ou 4 fois dans le quotient décimal approché est la période de l'EDIP. Pour valider cette règle du contrat didactique, nous avons proposé la question suivante.

> Comparez les deux nombres de chacun des couples suivants (la calculatrice est interdite).
> $\frac{83333}{25000}$ □ 3,(3)

Remarquons que le nombre en écriture fractionnaire $\frac{83333}{25000}$ est décimal car $25000 = 2^3 5^5$. Dans la division de 83 333 par 25 000, le chiffre 3 se répète 4 fois (après la virgule) sans être la période.

83333	25000
83330	3,33332
83300	
83000	
80000	
50000	
0	

11 C'est-à-dire l'effectuation successive de divisions euclidiennes qui constitue un prolongement décimal de cette division euclidienne.
12 La classe 6 est l'équivalent de la classe de sixième en France. Au Viêt Nam, il n'existe qu'une seule collection de manuels pour tout le pays.

Les réponses possibles

1. Réponse conforme au contrat didactique relatif à la division euclidienne (collège) :

$$\frac{83333}{25000} = 3,(3) \quad \textit{(noté Respect contrat)}$$

Cette réponse par l'*égalité* exprime le respect de la règle du contrat didactique selon laquelle, l'action d'effectuer des divisions euclidiennes successives « 83 333 : 25 000 » est arrêtée par la répétition du chiffre 3 deux, trois ou quatre fois dans le quotient décimal approchée.

2. Réponse par le signe « < » *avec une division correcte observée dans le brouillon*

$$\frac{83333}{25000} < 3,(3) \quad (\textit{noté Math.correct})$$

Cette réponse correcte peut être obtenue :

- par la réalisation jusqu'au reste 0 de la division de 83 333 par 25 000 qui donne le quotient décimal exact : 3,33332. Un observable de cette réponse est la réalisation de la division au brouillon.
- Par la transformation de 3,(3) en fraction, suivie de la comparaison des deux fractions dans $\mathbb{Q}$.

La calculatrice étant interdite, la division doit être réalisée à la main. Certaines réponses, comme « < » et surtout, « > » peuvent donc provenir de l'effectuation fausse de la division. C'est pour cela que nous avons prévu de recueillir les brouillons pour avoir accès au calcul.

Remarque. On aurait pu envisager la réponse $\frac{83333}{25000} \neq 3,(3)$ avec la justification arithmétique suivante : la décomposition du dénominateur en facteurs premiers, $25000 = 2^3 5^5$, permet de conclure à la décimalité du rationnel $\frac{83333}{25000}$, et « 3,(3) » ne représentant pas un nombre décimal, ces deux nombres ne sont pas égaux. Mais cette réponse est improbable chez des élèves de EMS en l'absence d'articulation entre division euclidienne et décomposition d'un entier en facteurs premiers. Elle n'est apparue ni dans EMS ni dans les ENS.

Quels sont les résultats ?

Nous constatons d'abord un nombre élevé de divisions erronées : 32% dans EMS et 22% dans ENS. Le tableau résume les réponses fondées sur une *division correcte*.

Classe / Réponse	« = » Respect contrat (faux)	« < » Math.correct	Total
EMS	122 (70 %)	53 (30 %)	175
ENS	35 (59 %)	24 (41 %)	59

Tableau 3. *Respect du contrat ou réponse correcte selon les niveaux*

L'effectif des réponses « = » chez les élèves du lycée observés est nettement plus élevé que celui des réponses mathématiquement correctes (70 % contre 30 %). Cela permet d'affirmer l'existence forte de la règle du contrat didactique. Le respect de cette règle du contrat didactique persiste aussi majoritairement dans les institutions de formation des enseignants (59 % contre 41 % de réponses correctes), institutions où pourtant les étudiants ont rencontré dans leur enseignement de mathématique des concepts d'Arithmétique.

3.2 Statut de l'Ecriture Décimale Illimitée (EDI) – Ordre discret dans l'ensemble des EDI

Dans le topos de l'élève (ce que l'élève a à faire, ce dont il a la responsabilité), il existe un seul exercice de comparaison portant sur des EDI, nommés nombres réels dans le manuel Algèbre 9[13].

> Comparer les nombres réels suivants :
> a) 0,123 et 0,(123) ;
> b) 0,(01) et 0,01001000100001… (Exercice 2, p. 2)

Dans la partie cours (topos de l'enseignant) tout ce qui concerne l'ordre de l'ensemble des EDI est donné dans un seul paragraphe du manuel.

> Nous avons appris à comparer des nombres rationnels en leurs écritures décimales. Le nombre réel peut se représenter en écriture décimale, donc, pour effectuer la comparaison (=, <, >) des réels, on peut le faire comme on sait le faire avec les rationnels.
> Par exemple : 1,414(7) < 1,41532…
> -2,3(02) < -1,89023…
> -7,498…< 0,015. (Ibid., p.4)

On recommande donc dans la partie cours de comparer les écritures décimales illimitées par simple généralisation d'une pratique antérieure, celle de la comparaison des écritures décimales des nombres rationnels (c'est-à-dire la comparaison des écritures décimales limitées ou illimitées périodiques). Cependant, pour l'élève, la comparaison de deux EDIP (rationnels) n'est jamais traitée (absence d'exercices), au profit de la comparaison des fractions. Bien que l'EDIP9 ne soit ni présente, ni traitée dans la comparaison des écritures décimales (ED), elle n'est pas officiellement exclue.

> Toute écriture décimale limitée ou illimitée périodique représente un rationnel. (Algèbre 9, p.3)

Dans ce contexte institutionnel, quel statut peut être donné aux EDIP9 ? Ci-après la question 2b proposée en classe 12 et aux futurs enseignants de mathématiques.

> Mettre une croix devant les affirmations justes (il y a peut-être plusieurs affirmations justes)
> *Le nombre décimal illimité périodique 0,99**9**…(ayant la période de 9) est* :
> -[2b1] *la suite numérique* (u_n) *où* $u_1 = 0,9$; $u_2 = 0,99$; …. ; $u_n = 0,\underbrace{99\ldots9}_{n}$; … ☐
> -[2b2] *la limite de la suite* (u_n) *ci-dessus.* ☐
> -[2b3] *un nombre réel qui est strictement inférieur à 1.* ☐
> -[2b4] *un nombre réel qui est supérieur à 1.* ☐
> -[2b5] *égal au nombre 1.* ☐
> -[2b6] *le plus proche de 1.* ☐

Au niveau de la classe 10 (Seconde), nous supprimons dans la question 2b les deux premières affirmations concernant les notions de suite numérique et de limite (non enseignées). La question 2b pour la classe 10 est donc la suivante.

> 2b) Mettre une croix devant les affirmations justes (il y a peut-être plusieurs affirmations justes)
> *Le nombre décimal illimité périodique 0,99**9**…(ayant la période de 9) est* :
> -[2b3] *un nombre réel qui est strictement inférieur à 1.* ☐
> -[2b4] *un nombre réel qui est supérieur à 1.* ☐
> -[2b5] *égal au nombre 1.* ☐
> -[2b6] *le plus proche de 1.* ☐

13 La classe 9 est l'équivalent de la classe de troisième en France.

Le tableau ci-après présente l'effectif des réponses selon les affirmations choisies pour la question 2b et selon les niveaux scolaires.

Choix Classe	2b1 « suite »	2b2 « limite »	2b3 «< 1 »	2b4 «>1»	2b5 « = 1 »	2b6 « le plus proche »	Aucun	Total
10	[*non proposée*]		112 64 %	0	9 5 %	164 94 %	3 2 %	174
12	45 51 %	13 15 %	56 63 %	0	0	74 83 %	2 2 %	89
EMS	Classe 12		168 64%	0	9 3%	238 90%	5 2%	263
ENS	24 31 %	8 10 %	64 82 %	0	2 3 %	62 79 %	1 2 %	78

Tableau 4. *Effectif selon les choix des affirmations*

L'écriture décimale illimitée n'a ni le statut de suite numérique convergente de nombres décimaux ni celui de « limite » de cette suite même quand la notion de limite a été introduite. Par contre, 45 élèves (51 %) de terminale et 24 futurs enseignants (31 %) acceptent de considérer cette écriture comme représentant la suite numérique (u_n) où $u_1 = 0,9$; $u_2 = 0,99$; …. ; $u_n = 0,\underbrace{99\ldots9}_{n}$; ….

Précisons que 39 des 45 élèves de classe 12 et les 24 futurs enseignants affirment en même temps que 0,999… :

- est le plus proche de 1
- n'est pas égale à 1
- n'est pas la limite de cette suite.

L'affirmation « 0,999… est la suite numérique (u_n) … » n'a donc pas, pour ces 39 élèves (44 % des élèves de classe 12), la signification analytique de suite convergente vers 1.
Remarquons que tous les élèves des classes 12 rejettent l'égalité « 0,999… = 1 » (98 % dans l'ENS !). La réponse largement majoritaire dans EMS et dans ENS est que 0,999… est le plus proche de 1 (90 % et 79 %). La signification de « 0,999… est la suite numérique (u_n)… » est donc la suivante : la succession des termes de la suite 0,9 ; 0,99 ; 0,999 ; … représente une succession de valeurs approchées de 1 ayant un plus grand élément 0,999… « le plus proche de 1 mais distinct ». On trouve ici les traces d'une problématique d'approximation, celle de 1 par une suite de nombres décimaux mais aussi celles d'un ordre discret induit par l'ensemble des entiers.
Les résultats dans ENS attestent qu'il n'y a pas une reprise dans ENS des EDI au sein de l'analyse qui permettrait de leur attribuer un statut de « suite numérique convergente » ou de « limite».

3.3 Écriture décimale illimitée non périodique (EDINP) et nombre irrationnel

Dans la partie cours du manuel Algèbre 9[14] la notion de nombre irrationnel est définie officiellement par les EDINP et l'écriture décimale permet d'introduire l'ensemble des nombres réels.

14 La classe 9 est l'équivalent de la classe de troisième en France.

> **2. Ecriture décimale illimitée non périodique. Nombre irrationnel**
> On considère maintenant l'écriture décimale illimitée non périodique. Par exemple :
> 96,13113111311113…
> 0,101001000100001…
> Il est clair que ces écritures décimales illimitées ne représentent pas de nombres rationnels.
> [...] On appelle nombre irrationnel un nombre qui a une écriture décimale illimitée non périodique.
> 3. Nombre réel. Les rationnels et les irrationnels sont appelés nombres réels. Tout nombre réel peut donc être représenté par une écriture décimale limitée ou illimitée périodique (les nombres rationnels) ou illimitée non périodique (les nombres irrationnels). Réciproquement, toute écriture décimale limitée ou illimitée périodique ou illimitée non périodique est la représentation décimale d'un nombre réel quelconque. L'ensemble des nombres réels est noté R. (Algèbre 9, p. 4)

On peut lire la remarque suivante à propos de la définition de l'ensemble des nombres réels :

> Remarque : du point de vue pratique, on n'effectue couramment que des calculs approchés sur les nombres réels avec la précision que l'on voudra, c'est-à-dire sur des rationnels exprimés par leurs valeurs approchées.
> Pas exemple, pour calculer : 0,12345 … + 1,3 à 0,1 près.
> On a : 0,12345 … + 1,3 ≈ 0,1 + 1,3 = 1,4.
> Pour le calcul à 0,01 près :
> 0,12345 … + 1,3 ≈ 0,12 + 1,3 = 1,42. (Ibid. , p.5)

C'est l'unique moment où l'on aborde l'écriture décimale illimitée non périodique dans le problème du calcul approché au collège. Cependant, l'élève n'a aucune responsabilité vis-à-vis de ce problème : aucune tâche de ce type ne lui est proposée.

Nous proposons la question suivante sur la relation entre les EDINP et les nombres irrationnels.

> Y a-t-il un nombre irrationnel entre 42,498 98… et 42,5 ?
> ☐ Oui et c'est …
> ☐ Oui, mais je ne sais pas lequel.
> ☐ Non. Parce que ……………………………………………………………

Quel « nombre irrationnel» peut-on fournir pour la réponse « Oui et c'est ... », c'est-à-dire quelles réponses peut-on prévoir ?

• EDIP9 (réponse fausse)

Rappelons l'échange entre deux élève de classe 11, déjà cité *(Le Thai Bao 2004)*

> E1: Non. Le nombre 17/90, parce que si on prend 0,1999…, on ne peut pas savoir quelle est la fraction. Si on prend 0,1999…, c'est un nombre irrationnel
> E2: Cet irrationnel, c'est combien?
> E1: Cet irrationnel, nous ne savons pas comment le représenter. Donc, nous l'écrivons 0,1(9)

Une majorité des élèves conclut que 0,1(9) est irrationnel parce qu'il ne correspond à aucune fraction. Une EDIP9 est donc un bon candidat de nombre irrationnel.

La réponse par une EDIP9 peut être produite par différentes stratégies.

- Moyenne arithmétique. Dans la recherche d'un nombre irrationnel entre deux bornes, le calcul du milieu des bornes est prévisible et peut amener à l'EDIP9.

$$\frac{42{,}49898\text{¼} + 42{,}5}{2} = \frac{84{,}9(98)}{2} = 42{,}4(99)$$ (réponse d'un élève de classe 10)

- Prolongement de l'ordre dans **D** à **D***n*

Les autres EDIP9 proviennent du prolongement de l'ordre dans **D** à **D***n*. Les observables sont, par exemple « 42,498999… (ou 42,4999…) car 42,498 98…< 42,4989 99…< 42,5.

• Moyenne géométrique (réponse juste)

En utilisant la propriété de moyenne géométrique $a<\sqrt{ab}<b$ où a et b sont positifs, on a donc $42{,}4(98)<\sqrt{42{,}5\times 42{,}4(98)}<42{,}5$. Il faut cependant démontrer l'irrationalité de $\sqrt{42{,}5\times 42{,}4(98)}$. Nous proposons ci-après un exemple d'une telle démonstration utilisant des éléments institutionnels présents dans EMS du Viêt Nam.

- Transformer « $42{,}4(98)=\frac{21037}{495}$ » par une règle algébrique systématique de EMS pour le passage de l'EDIP à la fraction correspondante.

- Démontrer que $\sqrt{\frac{425}{10}\times\frac{21037}{495}}$ ne correspond à aucune fraction $\frac{m}{n}$ (m, $n\in$N et $n\neq 0$) par un raisonnement par l'absurde comme dans la démonstration de l'irrationalité de la diagonale d'un carré de côté 1.

Ci-après celle du manuel *Algèbre 9*.

Supposons qu'il existe un rationnel positif irréductible $\frac{m}{n}$ (m, $n\in$N et $n\neq 0$) tel que $\left(\frac{m}{n}\right)^2=2$. Alors $\left(\frac{m}{n}\right)^2=2$ $\Rightarrow$ $m^2 = 2n^2$ (1). C'est-à-dire m^2 est pair, m est donc aussi pair : $m = 2m'$. En le remplaçant dans (1) : $4m'^2 = 2n^2$ ou $n^2 = 2m'^2$. C'est-à-dire n^2 est pair, n est donc aussi pair : $n = 2n'$. Alors, dans la fraction $\frac{m}{n}$, le dénominateur et le numérateur sont divisibles par 2. Elle n'est pas donc irréductible : cela est contradictoire avec l'hypothèse.

(*Algèbre 9* (partie cours), 2003, p. 6)

La démonstration que $\sqrt{\frac{425}{10}\times\frac{21037}{495}}$ est irrationnel est analogue.

• EDINP (réponse juste)

Une EDINP peut être construite à l'aide d'une loi permettant d'écrire les chiffres après « … ». Par exemple : 42,498 98… < 42,499 09 009 0009… < 42,5. Le « nombre irrationnel » donné par une EDINP est une réponse optimale si on considère la définition d'un nombre irrationnel dans EMS. Mais cette définition restant dans le topos de l'enseignant, on peut prévoir l'absence d'un « nombre » EDINP dans la réponse « Oui et c'est.. ».

Analyse des copies des élèves

Le tableau 5 présente les effectifs selon la réponse Oui ou Non. Pour cela nous réunissons en une seule colonne les réponses « Oui et c'est… » et « Oui, mais je ne sais pas lequel … ».

Classe/Réponse	*Oui*	*Non ...*	Pas de réponse	Total
Total EMS	213 (81%)	39 (15%)	11 (4%)	263
Total ENS	69 (88%)	7 (9%)	2 (3%)	78

***Tableau 5.** Réponses « Oui » ou « Non »*

Comme nous l'avions prévu dans notre analyse, la plupart des élèves (EMS) et des futurs enseignants (ENS) répondent par « Oui » : 81 % (ENS) et 88 % (EMS).

Examinons les réponses « Oui ». Nous codons les types de « nombres irrationnels » associés aux réponses « Oui et c'est…», selon deux groupes :

- des « nombres irrationnels » prévus,
- des « nombres irrationnels » non prévus.

• *« Nombres irrationnels » prévus*
- *EDIP9* : Réponse (fausse) par une EDIP9.
- *MG* : Réponse (juste) par la moyenne géométrique
- *EDINP* : Réponse (juste) par une EDINP.

• *« Nombres irrationnels » non prévus*
- *Dn* : Réponse (fausse) par un nombre décimal.
- *EDI* : Réponse (fausse) par une EDI avec pointillés « … » mais dont la non–périodicité n'est pas explicitée, par exemple : « 42,49997…» ou « 42,49998… ».
- $\sqrt{n}$: Réponse (fausse) $m + \sqrt{n}$ où m, n sont des décimaux positifs.
- Réponse par *42,4(98)*

Dans le tableau 6, nous récapitulons les réponses « Oui » des élèves et étudiants.

Réponse / Classe	*Oui et c'est …*							*Oui mais…*	Total
	prévu			non prévu					
	EDIP9	EDINP	MG	Dn	42,4(98)	EDI	$\sqrt{n}$		
EMS	100 47 %	0	0	26 12 %	3 1 %	0	4 2 %	80 38 %	213
ENS	21 30 %	0 0	0 0	4 6 %	3 4 %	5	3 4 %	33 48 %	69

Tableau 6. *EDINP et irrationalité*

Nous allons maintenant approfondir les résultats quantitatifs de ce tableau.

3.3.1 Difficultés de la construction d'un irrationnel : « Oui mais je ne sais pas lequel »

Dans EMS, 38 % des réponses sont « Oui, mais je ne sais pas lequel ». Cela montre les difficultés de la construction d'un irrationnel, tâche jamais proposée dans EMS au Viêt Nam. Dans ENS, le nombre encore plus grand des réponses par « Oui, mais je ne sais pas lequel » (48 %) montre que la construction des nombres irrationnels continue à être absente y compris dans les enseignements d'analyse réelle qu'ils reçoivent. Mais dans ces conditions qu'est-ce qu'un irrationnel pour ceux qui en construisent (62 % dans EMS et 52 % dans ENS) ?

3.3.2 La production d'irrationnels : « oui et c'est… »

Nous donnons ci-après les principaux résultats que l'on peut déduire des réponses « oui et c'est… ».

a. L'EDIP9 est un nombre irrationnel

- Dans EMS. La prépondérance des réponses par EDIP9 (47 %) montre que, pour un grand nombre d'élèves, une EDIP9 désigne un nombre irrationnel ; l'identification de 0,(9) au nombre 1 devient alors impossible. 97 réponses sur 100 par EDIP9 utilisent l'ordre prolongé de celui dans **D** pour produire une EDIP9 entre 42,498 98… et 42,5. Les 3 réponses restantes proviennent du calcul de la moyenne arithmétique.

- Dans ENS. Le nombre des étudiants (ENS) qui pensent encore que l'EDIP9 est un nombre irrationnel est considérable : 30 %.

b. L'écriture décimale illimitée non périodique (EDINP) n'est pas disponible pour produire de l'irrationalité

L'absence de toute réponse par EDINP atteste bien que la définition formelle des nombres irrationnels par cette écriture reste dans le topos de l'enseignant. La raison d'être de cette écriture décimale n'existe pas plus dans le topos de l'élève d'EMS que dans celui des futurs enseignants.

c. La racine carrée ne sert pas à produire des irrationnels

Tout d'abord il n'y a aucune réponse par la moyenne géométrique (MG). De plus les réponses (fausses) par le nombre « $m + \sqrt{n}$ » relevant du lien entre l'irrationalité et la notion de racine carrée sont quasi nulle malgré l'existence institutionnelle de l'exemple emblématique de l'irrationalité qu'est $\sqrt{2}$: 2 % pour l'EMS et 4% pour l'ENS. On peut penser que la nature décimale des bornes de l'encadrement (42,498 98… et 42,5) s'oppose à l'entrée dans le contrat de l'algèbre des radicaux (corps des constructibles).

d. L'écriture décimale est non opératoire pour produire un irrationnel

La définition d'un irrationnel comme une EDINP au Collège ne fournit pas d'outil pour la construction d'un irrationnel, en particulier par les opérations sur les écritures décimales.

Le caractère non opératoire de l'écriture décimale explique les réponses fausses comme un nombre irrationnel est

- un nombre décimal (comme 42,49997), c'est-à-dire une EDL (12 % des réponses EMS et 6 % des réponses ENS)
- 42,4(98), c'est-à-dire une EDIP (1 % des réponses EMS et 4 % des réponses ENS)
- une EDI dont la non – périodicité n'est pas explicitée (par exemple : 42,49998…) (0 % dans EMS et 7 % dans ENS)

Un nombre non négligeable d'élèves du lycée (15 %) et de futurs enseignants (9 %) affirment la non existence d'un irrationnel entre les deux nombres donnés. Que signifie cette réponse ?

3.3.3. Les raisons de l'inexistence d'un irrationnel entre deux nombres « Non. Parce que… »

Dans ENS un seul futur enseignant (sur 7) tente une explication savante par une majoration de l'erreur (problématique de l'approximation) :

> L'erreur entre les deux nombres est inférieure à 0,1.

Pour lui, les nombres sont-ils trop proches pour permettre l'existence d'un nombre irrationnel (ordre discret) ? En effet, il n'envisage pas qu'il y aura toujours une minoration comme $|42{,}5 - 42{,}498\,98\ldots| > 0{,}001$.
Dans EMS, sur les 39 élèves qui affirment « Non. Parce que … », seuls 18 élèves donnent une explication. Deux types d'explication apparaissent :

- celles liées à l'absence institutionnelle de la propriété de densité de **D** dans $\mathbb{R}$: « Il n'y a pas d'irrationnel entre ces nombres décimaux » (2 réponses)

- celles liées à l'ordre dans $\mathbb{R}$ qui, pour les élèves, est un ordre discret (16 réponses) comme :

  « 42,498 98… devient très proche de 42,5 » (9 explications)

  « 42,498 98… est illimité périodique, il est donc impossible de déterminer un nombre après lui et inférieur à 42,5 » (3 explications)

  « 42,498 98… est le plus proche de 42,5 » (4 explications).

La majorité des explications (16 sur 18) repose donc sur le fait que des valeurs successives d'une EDIP : 42,498 98… (42,498 ; 42,49898 ; 42,4989898 ; …) deviennent de plus en plus proche de 42,5.

La présence d'un ordre discret dans ces 16 explications signifie que pour ces élèves « 42,49898… est le nombre le plus proche de 42,5 », il n'y a pas de place pour un autre nombre irrationnel ou non !

Conclusion

1. Signification des écritures décimales illimitées (EDI) dans EMS et ENS inchangée depuis le Collège

Les résultats de l'expérimentation et leur analyse nous permettent de conclure que le rapport institutionnel à la décimalisation des nombres réels (non décimaux) reste inchangé bien au-delà du Collège : des résultats similaires se retrouvent dans EMS du Collège (élèves de classes 10, au début de l'année scolaire), EMS du Lycée (élèves des classes 12, après introduction de la notion de limite) et ENS (futurs enseignants, étudiants des 2 dernières années de ENS).
Ces résultats mettent en avant un problème de formation des enseignants. Pour qu'une vie des EDI existe dans l'enseignement de la notion de limite dans le futur, il semble nécessaire de modifier le rapport de l'enseignant aux EDI par la construction d'ingénierie de formation appropriée dans les écoles normales supérieures.
Pour approfondir ce résultat global, examinons ce que l'on peut conclure des résultats de l'expérimentation concernant les différents EDI comme EDIP9, EDIP et EDINP.
- L'EDIP9 « 0,999… » est, pour une très large majorité des élèves d'EMS et des futurs enseignants des ENS, un nombre, inférieur strictement à 1 et le plus proche de 1 (ordre discret).
Ce « nombre » EDIP9 est de plus, pour la plupart des élèves d'EMS et des futurs enseignants d'ENS observés, un nombre irrationnel.
Ces deux résultats montrent dans EMS :
  - le prolongement de l'ordre discret de $\mathbb{N}$ à $\mathbf{D}\infty$
  - l'absence institutionnelle d'identification de 0,(9) au nombre 1 au Collège et, surtout au Lycée au sein de la notion de limite.

Le fait de retrouver des résultats similaires au niveau des réponses des futurs enseignants (ENS) laisse supposer que la décimalisation des nombres réels n'est pas objet d'enseignement.
- Dans la division euclidienne généralisée de deux entiers (technique institutionnelle de la décimalisation d'un nombre rationnel), la majorité des élèves (EMS) et futurs enseignants (ENS) déduisent la périodicité (pour produire une EDIP) de la répétition de la même suite de nombres 2, 3 ou 4 fois dans le quotient décimal approché. Les propriétés des restes successifs de la division ne sont jamais prises en compte dans cette technique.
- Pour tous les sujets observés (EMS et ENS), la définition institutionnelle (Collège) de la

notion de nombre irrationnel comme EDINP est vide de sens.

2. Absence de la re - interprétation d'une EDI par la notion de limite mais présence potentielle du statut de suite numérique pour une EDI

Aucun des élèves des classes 12 (EMS) et futurs enseignants sauf 1 (ENS) ne donne le statut de « limite » à une EDI.
Le questionnaire proposé induit potentiellement une problématique d'approximation de la notion de limite dans le travail nécessitant un prolongement de l'ordre et des opérations dans **D** à **D**∞ (addition de deux EDIP et intercalation entre deux EDI). L'interprétation d'une EDI comme une « succession de valeurs décimales » approchant cet EDI apparaît fréquemment dans les classes observées (classe 12 de EMS et dans une moindre mesure dans ENS). L'absence du statut de suite numérique d'une EDI n'est donc que partiellement vraie.
Ce dernier résultat montre que, malgré la fragilité de la décimalisation des réels en classe 12, l'interprétation possible d'une EDI comme suite peut permettre d'envisager de faire vivre une ingénierie didactique organisant une nouvelle rencontre avec la notion de limite *via* l'approximation décimale.
L'étude des réponses (classe 12 et ENS) dans lesquelles le statut de « succession des valeurs décimales » est attribué à une EDI montre cependant que l'ordre discret de la notion de limite s'oppose :

- à l'attribution d'un statut numérique à l'ensemble des EDI (ordre et opérations),
- à l'identification du type « 0,999… = 1 ».

Les résultats de cette enquête conduisent à poser la question suivante : dans les conditions actuelles de l'enseignement des mathématiques au Viêt-nam mais aussi en France, est-il possible d'organiser dialectiquement la prise en charge par l'enseignement secondaire des deux passages fondamentaux pour l'analyse que sont :

- le passage de l'ordre discret dans N à l'ordre dense (non discret) dans **D** et **D**∞,
- le passage de l'algèbre des limites à la problématique d'approximation de la notion de limite ?

Cette question concerne aussi la formation des enseignants de mathématiques.

Pour tenter d'apporter des éléments de réponse à cette question nous avons conçu, réalisé (en classe 12) et analysé une ingénierie didactique qui fera l'objet d'un prochain article.

Bibliographie

BKOUCHE R. (1996) Point de vue sur l'enseignement de l'analyse : des limites et de la continuité dans l'enseignement. *Repères - IREM* n°24, pp. 67-76. Pont-à-Mousson : Topiques éditions.

BOLZANO B. (1817) La théorie des nombres dans un ouvrage posthume manuscrit de Bernard Bolzano (traduction en français par Sebestik J.), *Revue d'Histoire Des Sciences*, T. XVII, 1964, pp. 129- 164.

BOSCH M., ESPINOZA L. et GASCON J. (2002) El profesor como director de procesos de estudio: analisis de organizaciones didacticas espontaneas, *RDM* 23/1, pp.79 –135, Edition la Pensée Sauvage, Grenoble.

BOURBAKI N. (1960) – *Livre III Topologie générale*, Hermann & Cie, Editeurs.

BROUSSEAU G. et NADINE N. (1987) *Rationnels et Décimaux dans la scolarité obligatoire,* Document pour les enseignants et pour les formateurs, IREM de Bordeaux.

CANTOR G. (1872) Über die Ausdehnung eines Satzes aus der trigonometrischen Reihen, *Mathematische Annalen 5*, p. 123-132. Signalons le document électronique disponible sur le site de la BNF qui rassemble la majorité des œuvres de Cantor traduites en français. Attention, si certaines de ces traductions ont été revues par Poincaré, d'autres sont souvent mauvaises et éparses, et sont donc à consulter avec toutes les précautions nécessaires.

CAUCHY A. L. (1821) *Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique*, Paris, Gauthiers-Villars et Fils, Imprimeurs – Libraires du Bureau Des Longitudes de l'Ecole Royale Polytechnique éd. (1847).

DHOMBRES J. (1978) *Nombre, mesure et continu*. épistémologie et histoire, Cedic/Fernand Nathan.

DEDEKIND R. (1872) – *Was sind und was sollen die Zahlen*, Braunschweig Viewegu.Sohn (traduit en anglais , chez Dover, 1963 : Essays on the theory of number)

HILBERT D. (1903) *Grundlagen der geometrie*, Leipzig, Teubner. Réimpr. Dunod, 1971 (réimpr. Gabay 1997) (ISBN 2-87647-127-2) Édition critique avec introduction et compléments préparée par Paul Rossier. La traduction est celle de la 10ème édition, avec indications des variantes des éditions successives.

LEBESGUE H. (1931) *La mesure des grandeurs*, Albert Blanchard 1975.

LE THAI BAO T.T. (2004) *Etude sur la notion de limite de fonction dans l'enseignement des mathématiques : Ingénierie didactique dans un environnement calculatrice*, Mémoire DEA, Université de Pédagogie de HCM ville.

LE THAI BAO T.T. (2007) *Etude didactique des relations entre notion de limite et décimalisation des nombres réels dans un environnement « calculatrice ». Une étude de cas dans l'enseignement mathématique secondaire (EMS) au Viêt-nam*, Thèse en cotutelle, Université Joseph Fourier et Université Pédagogique de Ho Chi Minh.

MARGOLINAS C. (1988) Une étude sur les difficultés d'enseignement des nombres réels. *Petit x* n° 16, pp. 51-66.

NEYRET R. (1995) *Contraintes et détermination des processus de formation des enseignements : nombres décimaux, rationnels et réels dans les IUFM*. Thèse. Université Joseph Fourier.

STEVIN S. (1585) *Traité des incommensurables grandeurs*, De Thiende.

TROUCHE L. (1996) *A propos de l'apprentissage des limites de fonctions dans « un environnement calculatrice ». Etude des rapports entre processus de conceptualisation et processus d'instrumentation*, Thèse, Université Montpellier II.