D’UNE GÉOMÉTRIE DU PERCEPTIBLE À UNE GÉOMÉTRIE DÉDUCTIVE : À LA RECHERCHE DU PARADIGME MANQUANT

Denis TANGUAY et Loïc GEERAERTS
Université du Québec à Montréal (UQAM)

Résumé. Le passage d’une géométrie du perceptible à une géométrie déductive a été l’objet, depuis les années 80, de l’attention soutenue des didacticiens des mathématiques. En France, Houdement et Kuzniak ont caractérisé les épistémologies et modes de travail des géométries du primaire et du lycée selon deux paradigmes, respectivement la *Géométrie naturelle* (G-I) où la perception et l’intuition priment, et la *Géométrie axiomatique naturelle* (G-II) qui est grosso modo celui de la géométrie euclidienne. Nombreuses études montrent que ni les programmes, ni les manuels n’arrivent à aménager un passage sans rupture de l’une à l’autre, à situer clairement attentes et contrat (didactique) vis-à-vis les élèves, et à éviter que l’empirisme, notamment celui véhiculé par le mesurage, ne se pose en obstacle à l’apprentissage de la démonstration en géométrie. Nous chercherons à diagnostiquer des causes possibles des difficultés des élèves à cet égard. Ce diagnostic nous conduira à considérer le *paradigme du physicien-géomètre*, inspiré des travaux de Jahnke. Nous ferons valoir en quoi il peut permettre la mise en place, en classe, de pratiques et activités assurant une transition plus harmonieuse entre la G-I et la G-II, notamment en changeant le statut des axiomes et en réhabilitant le rôle du mesurage dans la démarche. Nous faisons l’hypothèse qu’un apprentissage plus efficace de la démonstration en résulterait. Des opérationnalisations spécifiques seront envisagées : élaboration par la classe d’un répertoire de fiches, « figures-clés », déductogrammes, etc.

Mots clés. Paradigmes géométriques, apprentissage de la démonstration, empirisme, raisonnement déductif, mesure, figures-clés, déductogrammes.

1. Introduction

Pourquoi la géométrie est-elle considérée comme domaine privilégié pour apprendre la démonstration[1] et le raisonnement déductif en mathématiques ? Il y a bien sûr des raisons historiques et de tradition scolaire à cela. Les *Éléments* d'Euclide ont été considérés pendant deux millénaires comme l'ouvrage mathématique de référence en matière de rigueur et d'organisation déductive. En Occident, les institutions scolaires ont entretenu ce rôle

1 Comme chez Duval (1991), nous réservons le terme « démonstration » à la preuve mathématique formelle, qui établit qu'un résultat est vrai en combinant déductivement (selon les règles de la logique propositionnelle) d'autres résultats déjà démontrés ou admis comme axiomes.

d'exemplarité de la géométrie via des cursus et des manuels proposant des développements en tout ou en partie « à la Euclide », avec un accent tout particulier mis sur la démonstration.

1.1. Articuler sens et rigueur

Mais il s'est par ailleurs toujours trouvé mathématiciens et enseignants pour promouvoir ce rôle de la géométrie en le justifiant par des arguments intrinsèquement liés au domaine. Pour le mathématicien René Thom (1974), par exemple, la géométrie aurait un rôle fondamental à jouer dans l'évolution des représentations que se fait l'enfant de l'espace et du continu : notamment quand il mesure, l'enfant donne une structure opératoire au continu en faisant inconsciemment agir des groupes comme $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$ sur ce continu, initialement amorphe et homogène dans son entendement. Toujours selon Thom, la géométrie serait ainsi un intermédiaire essentiel entre la pensée usuelle et la pensée formelle.

Pour notre part, nous en faisons une hypothèse de recherche : la géométrie peut se prêter à une démarche d'apprentissage de la preuve et du raisonnement déductif. Cela n'exclut pas, bien sûr, que d'autres domaines mathématiques puissent également s'y prêter, comme par exemple les mathématiques discrètes (Grenier et Payan, 1998).

> – *Les concepts géométriques ont une résonance sensible*[2] *et perceptive forte, et se prêtent par ailleurs à plusieurs degrés de formalisation, qui vont des caractérisations purement descriptives des manuels du primaire aux définitions formelles données par l'axiomatique de Hilbert, en passant par des systèmes moins stricts comme celui des* Éléments *d'Euclide ;*
> – *les propriétés* [...] *et concepts sont accessibles selon différents modes : empirisme, intuition, induction, déduction, avec pratiquement tous les dosages et métissages possibles ;*
> [...]
> – *compte tenu des proportions raisonnables que prennent les chaînes déductives* [en géométrie]*, compte tenu du caractère perceptif des résultats en cause, l'élève* ***garde bonne prise sur le sens et l'intuition****. Il apprend* ***à articuler intuition et déduction en démonstration****, et plus généralement sens et rigueur au sein de l'activité mathématique.*
> (Tanguay, 2002, p. 375)

Articuler sens et rigueur ne va cependant pas sans poser des difficultés du point de vue de l'enseignement. Pour Bkouche (1988, p. 9), « l'enseignement de la géométrie est difficile, d'autant plus difficile que la géométrie participe de la connaissance rationnelle et de la connaissance sensible et que sa compréhension se situe au carrefour du sensible et de l'intelligible. » Duval (2005, p. 6) va dans le même sens quand il écrit : « Parmi tous les domaines de connaissances dans lesquels les élèves doivent entrer, la géométrie est celui qui exige l'activité cognitive la plus complète, puisqu'elle sollicite le geste, le langage et le regard. Là, il faut construire, raisonner et voir, indissociablement. »

1.2. Une rupture inévitable ?

On retrouve la trace de cette polarisation, entre le sensible et l'intelligible, le perceptif et le déductif, dans les paradigmes géométriques, tels qu'ils ont été identifiés par Houdement et Kuzniak (2006). Rappelons que ces auteurs caractérisent les cadres de référence — l'ensemble

2 Le mot « sensible » doit être compris ici comme « relevant des sens ».

des présupposés, des convictions, des valeurs, des modes et méthodes de travail, des pratiques — qui circonscrivent *l'espace de travail* dans lequel l'apprenti géomètre agit et réfléchit, selon trois paradigmes.

En *géométrie naturelle*, ou G-I, le mode de validation privilégié est la perception. L'expérience, l'intuition et le raisonnement (principalement inductif) s'y exercent sur des objets qui renvoient en principe directement au réel. La *géométrie axiomatique naturelle*, ou G-II, est essentiellement celle d'Euclide. Son mode de validation privilégié est le raisonnement déductif, qui s'exerce à partir d'un noyau minimal d'axiomes et de définitions choisis pour constituer une modélisation du réel. La *géométrie axiomatique formaliste*, ou G-III, est celle de Hilbert, dans laquelle l'axiomatisation s'est en principe affranchie de la référence au réel. S'il semble admis qu'on doive passer de la G-I au primaire à la G-II au secondaire, les questions de l'échéancier et des modalités de cette transition restent entières. Kuzniak (2010), par exemple, montre bien que les programmes officiels proposent des espaces de travail morcelés, qui oscillent confusément entre les deux paradigmes, et que par ailleurs manuels et enseignants ne savent pas situer clairement leurs attentes en géométrie au collège[3], quand ils n'introduisent pas d'importantes ruptures de contrat (voir aussi Houdement et Kuzniak, 2003 ; Parzysz, 2006 ; ou Tanguay, 2002 pour le Québec). C'est la difficulté relevée par tant de didacticiens depuis les années 80. La fracture est-elle irréductible ? Est-elle intrinsèquement portée par les concepts géométriques — un obstacle épistémologique en géométrie, au sens de Bachelard ou de Brousseau (1998) —, ou s'agit-il d'un obstacle didactique, un effet de l'enseignement ?

1.3. Questions de recherche

On peut penser qu'un travail en Géométrie axiomatique naturelle est amorcé au début du collège (ou du secondaire au Québec, avec des élèves de 11 à 15 ans), notamment avec l'étude plus systématique des propriétés des triangles et des quadrilatères. Mais de quelle façon ces propriétés doivent-elles être examinées en classe ?

Confrontés à cette question dans un cours de *Didactique de la géométrie* donné à l'UQAM en formation des maîtres, nous en avons fait nos questions de recherche : comment mener l'étude des triangles et des quadrilatères au début du secondaire pour que leurs propriétés soient abordées autrement que comme des évidences perceptives, mais plutôt comme des relations structurales à l'intérieur de chaque classe d'objets ('quatre côtés isométriques' implique 'diagonales perpendiculaires') ou d'une classe d'objets à une autre ('parallélogramme et diagonales isométriques' implique 'rectangle') ? Et la mesure ? Quel rôle doit-elle avoir ? Si son rôle et le statut des conclusions auxquelles elle donne accès sont appelés à changer, quand et comment cela peut-il ou doit-il se faire ?

3 Les premières années du secondaire au Québec.

2. Éléments de réflexions théoriques

2.1. Niveaux van Hiele, raisonnement déductif et sériation des propositions

Quels modes de travail « intermédiaires » peut-on envisager entre ceux sous-tendus par la G-I et la G-II ? Comment passer :

- de la géométrie du 'botaniste-décorateur' (Duval, 2010), la géométrie du constat perceptif brut,
- à la géométrie instrumentée (construction et mesurage aux instruments[4]),
- à la géométrie des axiomes et de la démonstration…

… en minimisant les ruptures de contrat, notamment en ce qui a trait aux rôles et statut de la mesure ? Les néerlandais Dina et Pierre van Hiele se sont intéressés à de telles transitions du point de vue psycho-développemental de l'élève, et y ont vu les stades ou « niveaux » suivants (Crowley, 1987).

- Au niveau 1, décrit comme celui de la **visualisation**, les élèves appréhendent figures et concepts géométriques globalement par leur forme, leur apparence générale, leur orientation spatiale, sans égard pour les propriétés de leurs composantes.
- Le niveau 2 est celui dit de l'**analyse** : une analyse des concepts géométriques est en effet amorcée, les propriétés des figures émergent et servent de base à la conceptualisation de *classes de formes,* mais sans aller jusqu'à l'inclusion : l'élève ne conçoit pas par exemple qu'un carré est un rectangle. Les relations entre les propriétés d'une même figure ne sont pas comprises. L'élève définit chaque objet par la *litanie* de ses propriétés, et dira par exemple qu'un triangle isocèle est un triangle qui a deux côtés isométriques, deux angles isométriques et un axe de symétrie. Il a de la difficulté à comprendre et produire des démonstrations.
- Au niveau 3, celui des **déductions informelles** (ou **abstraction**), les relations structurales entre les propriétés d'une figure et les inter-relations entre classes, notamment par inclusion, sont maîtrisées. L'élève comprend les définitions et a intégré le fait qu'elles sont « minimales »[5]. Il peut suivre ou donner des arguments plus formels, mais a de la difficulté dès qu'ils sont complexes ou partent de prémisses non usuelles.
- Le niveau 4 est celui dit des **déductions formelles**. L'étudiant qui a accédé à ce niveau peut construire une preuve formelle, et la possibilité de la mener selon plusieurs chemins est envisagée. La signification des déductions dans un système axiomatique est bien comprise.

Pour faire le lien avec ce dont nous avons discuté en §1.2 et §1.3, il semble donc que d'après les van Hiele la preuve déductive, et par conséquent le travail en Géométrie axiomatique

4 Il y aurait lieu ici de distinguer deux types d'instruments de mesure : ceux qui font appel à la perception (règle graduée, rapporteur d'angles...) et ceux qui donnent une lecture numérique directe, comme les fonctionnalités de mesure des logiciels de géométrie dynamique. Pour les élèves, le rapport à l'imprécision et à l'erreur de mesure ne sera pas le même dans les deux cas.

5 La tradition mathématique fait des entorses à ce principe de minimalité, surtout pour des raisons pratiques. Par exemple, trois angles droits suffisent pour définir « rectangle » mais on peut penser que la définition résultante est lourde à gérer pour toutes sortes de considérations pratiques.

naturelle (G-II), ne serait accessible qu'à l'élève qui a atteint le niveau van Hiele 3 (abstraction), auquel on voudrait idéalement amener l'élève. Cet accès à la preuve, nous en avons parlé, est problématique. Selon Duval (1991), elle implique que l'élève passe de l'argumentation à la démonstration : ce dernier envisage la preuve comme un *discours*, un cumul d'arguments, alors qu'il doit la comprendre comme un *calcul* sur les propositions. Nous avons fait valoir (Tanguay, 2005, 2006, 2007) en quoi fondamentalement, ce passage exige de l'élève qu'il reconsidère la primauté de ce qui est en jeu, la validité des enchaînements devant prendre le pas sur la vérité des propositions sans toutefois l'occulter, et comment cette vérité des propositions peut alors faire obstacle. Nous avons également mis en évidence que d'un point de vue psychologique, l'adhésion au *théorique* que cela suppose n'est en rien naturelle pour l'enfant. Revenons-y, pour chercher à mieux comprendre les rôles centraux que jouent alors la façon de concevoir les définitions et ce que nous appelons la ***sériation des propositions***.

Considérons par exemple le problème suivant. Par chaque sommet du triangle *ABC*, on trace la parallèle au côté opposé. Ces parallèles se croisent deux à deux en *M*, *N* et *O* comme dans la figure ci-dessous. On veut montrer que *A* est le milieu de [ON], *B* le milieu de [OM] et *C* le milieu de [NM] [6].

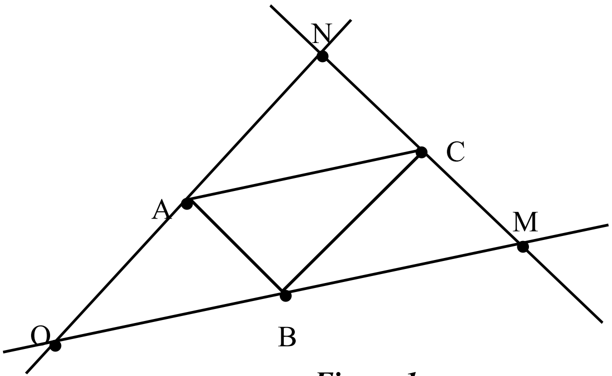

Figure 1

Une preuve possible consiste à identifier *OACB*, *ACMB* et *ANCB* comme des parallélogrammes, et de conclure en invoquant l'isométrie des côtés opposés du parallélogramme et la transitivité de l'isométrie.

Pour mener à bien cette preuve, l'élève doit faire ce que nous appelons la *sériation* des propositions en jeu : il doit comprendre que du point de vue de l'organisation déductive, la proposition « *OACB* est un parallélogramme » vient d'abord et la proposition « *AO* = *CB* » vient ensuite, en tant que déduction de la première. Il doit de plus légitimer ces énoncés en donnant les bonnes « raisons » : *OACB* est un parallélogramme parce que les droites (*OA*) et (*CB*) sont parallèles, de même que les droites (*OB*) et (*AC*), en tant que données de l'exercice, et parce que *OACB* répond alors à la *définition* choisie (le cas échéant) pour le

6 Cette preuve et la construction sous-jacente sont intéressantes car elles permettent de montrer que les droites qui portent les hauteurs de tout triangle sont concourantes, sachant que les médiatrices le sont, les médiatrices de *MNO* portant les hauteurs de *ABC*. On peut aussi, dans un deuxième temps, demander de montrer que les triangles *ABC*, *MCB*, *CNA* et *BAO* sont isométriques et semblables à *MNO*.

parallélogramme. La déduction doit elle aussi se faire en invoquant la bonne raison : la « règle d'inférence » (Duval, 1991) issue du corpus des théorèmes et axiomes, déjà énoncée sinon prouvée en classe, qui dit que « dans tout parallélogramme, les côtés opposés sont isométriques. »

Or, dans l'entendement d'un élève de niveau van Hiele 2, les propriétés

côtés opposés parallèles – côtés opposés isométriques – angles opposés isométriques – diagonales qui ont le même milieu –

forment un bloc indissociable, appelé *parallélogramme*. Le raisonnement attendu nécessite précisément qu'il puisse dissocier ces propriétés pour faire la sériation des propositions.

Cette difficulté pour l'élève à opérer la dissociation est exacerbée :

- par la figure, qui donne à voir toutes les propriétés en même temps ;
- par sa conception de la preuve, comme une argumentation où l'on cumule des énoncés vrais, les énoncés portant sur les segments en cause dans la figure et les propriétés du parallélogramme invoquées étant en l'occurrence tous vrais ;
- par la nécessité qu'a l'élève de passer à un niveau qui n'est pas spontanément ou naturellement le niveau pragmatique où il considère le problème, de comprendre qu'il ne s'agit pas seulement de déterminer ce que l'on peut affirmer ou non de la figure, mais que c'est la validité des enchaînements qui est centrale, validité qui n'a de sens que par rapport au développement théorique — le réseau de résultats qui s'appuient les uns sur les autres, qui découlent les uns des autres — où s'inscrivent les énoncés ; en y incluant cet énoncé au statut théorique si particulier, celui de *convention*, qu'est la définition du parallélogramme.

En résumé, là où l'élève devrait saisir un enchaînement nécessaire et valide, il ne comprend que des arguments vrais et (selon lui) tous pertinents simultanément (Tanguay, 2005, p. 59).

2.2. Le travail sémantique et la mesure

Il y aurait donc un lien étroit entre la conception des définitions comme une litanie de propriétés et la difficulté à accéder à la démonstration : tant que la propriété caractéristique retenue dans la définition et les autres propriétés restent « agglutinées » dans l'esprit de l'élève, tant qu'il n'arrive pas à les détacher les unes des autres, il ne sait pas quoi invoquer, à quel moment, et comment organiser la sériation attendue dans une démonstration. Cette sériation relève typiquement de ce que Durand-Guerrier (2008) ou Barrier et al. (2009) décrivent comme *le travail syntaxique sur les énoncés*.

Or, pour élaborer la preuve qui nous occupe, il faut bien au préalable avoir identifié les parallélogrammes, ce qui nécessite l'habileté particulière à repérer une sous-figure à l'intérieur d'une figure donnée. Il faut aussi, plus globalement, avoir scruté, décortiqué cette figure, peut-être l'avoir construite si elle n'était pas donnée, et bien sûr être capable de donner un sens aux énoncés qui s'y rapportent et qu'on veut combiner déductivement ensuite. Pour réaliser ce travail de combinaison et en rendre compte par écrit ou à l'oral, ces énoncés doivent par ailleurs être « instanciés », c'est-à-dire contextualisés à la figure.

Ici aussi, on peut invoquer les réflexions de Durand-Guerrier ou Barrier et al. (op. cit.) : le travail de preuve résulterait d'allers-retours dialectiques entre une exploration des objets mathématiques en cause (travail 'sémantique') et une analyse (formelle) des définitions, propriétés et théorèmes liés à ces objets (travail 'syntaxique'[7]). En géométrie (plane), le travail sémantique sur les objets se fait essentiellement à partir des figures, via l'observation, la construction (instrumentée) et ***le mesurage***.

À la fin du primaire et au début du secondaire, le mesurage, combiné à la construction, donne en effet lieu à un premier niveau d'analyse structurale, que Duval (2005) décrit comme la « déconstruction dimensionnelle des formes » : repérage – décomposition – dissociation des éléments 0D (sommets, points de rencontre…), 1D (côtés, diagonales…) et 2D dans la figure plane ; ou encore, des éléments 0D, 1D, 2D, 3D dans le solide. Quand on mesure, on prend conscience que la graduation sur l'instrument est trop grossière et que certaines mesures « tombent » entre deux traits, qu'il peut y avoir imprécision ou même erreur de mesure, qu'on doive raffiner si possible les divisions, les instruments et les méthodes de mesure, qu'on doive améliorer le contrôle des résultats induits par cette démarche. Celle-ci véhicule donc en elle-même, intrinsèquement, l'idée que la seule observation est déficiente, que notre perception est limitée, que le trait de crayon, par exemple, est source d'imprécision alors même qu'il devrait être en théorie d'épaisseur nulle dans l'objet idéal dont les caractéristiques sont à l'étude. Autrement dit, celui qui mesure peut être amené à prendre conscience que les objets sur lesquels il fait porter sa perception sont abstraits, d'un niveau d'abstraction qui va au-delà de ce que la perception peut atteindre. Or, la mesure est presque systématiquement disqualifiée en G-II et **cela pose problème !**

2.3. Le paradigme manquant : la géométrie du physicien-géomètre

Rappelons en effet que la confusion évoquée en §1.2 et bien identifiée par Kuzniak (2010) et Parzysz (2006), porte presque invariablement sur le statut ambigu qu'a la mesure, notamment en ce qui concerne les conséquences de son exactitude (ou non) sur les démonstrations. Comment réhabiliter le mesurage tout en initiant l'élève à la preuve déductive, en une démarche qui ne mettrait pas les deux processus en opposition ?

Comment en outre passer du pragmatique au théorique, comment susciter ce « regard théorique » chez l'élève, lui permettant de bien comprendre en quoi consiste la sériation des propositions attendue pour un problème de démonstration donné. Quoi faire pour que l'élève donne du sens à cette démarche, notamment par rapport à ce qu'elle apporte de plus que la mesure ? Comment faire faire à l'élève ce nécessaire pas de côté, par lequel il pourra situer le rôle des différents énoncés et le statut propre à chacun, à l'intérieur de la preuve comme à l'intérieur de la théorie ?
Les travaux de Jahnke (par ex. 2007 ou 2010) et nos propres réflexions et expériences d'enseignement nous amènent à proposer le cadre suivant. Il s'agit de faire de la classe une communauté de chercheurs (Wenger, 1998) et d'y étudier la géométrie exactement comme on

7 Bien que le produit final d'une démonstration soit (généralement) un texte, le mot syntaxe n'est pas à prendre ici au sens de la linguistique. L'acception des mots *sémantique* et *syntaxe* est ici celle que leur donne la logique : voir par exemple la table des matières de Cori et Lascar (1994).

étudie la physique expérimentale. Le mesurage a alors une double fonction : d'exploration et de vérification (Vadcard, 1999). Comme dans un laboratoire de physique, l'exploration amène la classe à énoncer des hypothèses (Jahnke, 2007), au sens que les sciences expérimentales donnent à ce mot[8]. Certaines de ces hypothèses sont envisagées comme des lois de la physique, et elles prennent alors la place des axiomes (euclidiens) mais n'ont pas le même statut : ce sont ici des conjectures établies via la mesure et l'observation, qui peuvent donc à tout moment être remises en doute, revérifiées, recontrôlées, notamment par rapport à leurs conditions d'application. Afin de les différencier des axiomes euclidiens et pour marquer leurs spécificités, nous les appellerons des *postulats*. D'autres parmi ces conjectures pourront être démontrées (c'est-à-dire déduites) à partir des premières mais ici aussi, le statut des énoncés déduits doit être nuancé par rapport à celui qu'il a en géométrie euclidienne : les énoncés déduits permettent de tisser un réseau déductif qui confortent les hypothèses, mais qui ne sont assurés que dans la mesure où celles-ci le sont.

Par exemple, une classe où l'on a conjecturé et vérifié expérimentalement que *les angles alternes-internes, déterminés par deux parallèles coupées par une sécante, sont isométriques*, pourra en déduire (via la preuve « classique ») que la somme des mesures des angles intérieurs de tout triangle vaut 180°. Seulement voilà, reprendre ensuite des mesures dans différents triangles pour vérifier le théorème n'est plus forcément incongru ! (Jahnke, 2007). En effet, la démonstration du théorème sur la somme fait intervenir une règle d'inférence dont la certitude n'est pas (encore) totalement assurée. Augmenter la certitude du théorème sur la somme des angles intérieurs permet alors de mettre en œuvre une forme de raisonnement *abductif* (ou « raisonnement plausible », selon la terminologie de Pólya (1989))[9], qui rend plus sûr encore l'énoncé duquel on est parti, celui sur les alternes-internes : sa certitude se trouve corroborée par chacun des résultats vérifiés dans le réseau déductif dont il est une des sources. Plus le réseau se développe et le travail avance, plus les énoncés sont sûrs au point qu'éventuellement, leur statut acquerra ceux qu'ont les axiomes et les théorèmes en G-II.

3. Éléments d'opérationnalisation en classe

3.1. Sérier, théoriser

Nous l'avons vu, comprendre ce qu'est une démonstration, c'est entre autres comprendre quelle est la sériation des propositions attendue et sur quelle base elle doit être faite. Pour une démonstration donnée, une telle sériation nécessite, en plus de sa structuration, que les règles à mobiliser aient été identifiées, que leurs conditions d'application aient été vérifiées, et le tout coordonné au processus d'instanciation. Comme l'a bien fait valoir Duval (1991), l'élève doit

8 Ce sens est d'ailleurs beaucoup plus proche de celui qu'a le mot *hypothèse* dans le langage courant, et que l'usage mathématique scolaire a en partie détourné. Pour éviter les malentendus, nous suggérons de ne pas parler en classe « d'hypothèses » pour désigner ce que l'on sait, ce qui est donné au départ d'un problème dont on cherche à prouver la *thèse*, mais d'utiliser systématiquement le mot « données ».

9 Le raisonnement plausible ou abduction peut se modéliser comme suit : si « P implique Q » est vrai, savoir que Q est vrai ne permet pas de conclure que P le sera mais en augmente la plausibilité. C'est la forme de raisonnement qu'on déploie le plus souvent dans les phases de recherche, la proposition P coïncidant alors avec la conjecture dont on « éprouve » la vraisemblance en examinant si ce qu'on en déduit est non contradictoire.

pouvoir déterminer le statut opératoire (condition d'application, règle d'inférence ou proposition inférée) des propositions qu'il organise en inférences. Mais si l'on veut que, de plus, l'élève comprenne comment à l'échelle globale se construit et s'organise l'édifice géométrique, il doit pouvoir attribuer aux règles d'inférence le bon statut théorique : s'agit-il d'un axiome (ou peut-être d'un postulat, selon le paradigme du physicien-géomètre) ? D'un théorème (d'un énoncé déduit) ? D'une définition ?

En effet, à la sériation locale des propositions dans la démonstration correspond une sériation-organisation globale des énoncés dans la théorie géométrique en construction : la définition vient d'abord, certains énoncés sont ensuite déduits, dans un ordre qui est fondamental pour la cohérence interne de l'édifice, un principe que Rouche (1989, p. 9) a bien souligné : « Il est dans la nature des preuves de s'appuyer sur des propositions prouvées et de s'enchaîner ainsi les unes aux autres » ; de la même façon que les propositions s'enchaînent à l'intérieur de chaque preuve, pourrions-nous ajouter. Ce principe nous semble avoir été perdu de vue, notamment par le récent programme québécois. En interprétant d'une façon réductrice la notion « d'îlots déductifs » issue de Choquet (1964), celui-ci a en effet occasionné un morcellement des contenus géométriques du secondaire du point de vue de leur organisation déductive. À cette idée d'îlot déductif, nous sommes d'avis que le paradigme du physicien-géomètre peut opposer celui de *réseau déductif* (cf. §2.3).

3.2. Règles et définitions : le classeur à anneaux

Mais cette édification de la géométrie à l'échelle globale par organisation et sériation des énoncés, l'élève doit en être partie prenante et lui donner du sens. Nous proposons que chaque énoncé — définition ou règle — soit travaillé par tout le groupe-classe, via l'élaboration du contenu d'une *fiche*. Les fiches sont ensuite transcrites par chaque élève et réunies dans un classeur individuel. Le format du classeur, et par conséquent des fiches, est choisie pour s'intégrer au mieux à l'*espace de travail géométrique* (Houdement et Kuzniak, 2006), pris ici au pied de la lettre.

Pour les avoir éprouvées en classe, nous suggérons des fiches de format 24×16 cm (orientation « paysage »), format qui permet d'ouvrir le classeur dans le haut du bureau et laisse ainsi libre la quasi-totalité de la surface de travail. Le système de classement permet d'insérer au fur et à mesure n'importe quelle fiche où l'on veut et de la retrouver facilement.

Nous suggérons en effet d'identifier chaque fiche par un mot ou une expression inscrit en bas à droite. Pour les fiches-définitions, il s'agira bien sûr du nom de l'objet ou de la relation à définir, par exemple, **droites perpendiculaires**. Pour les fiches-règles, l'expression-clé décrit la conclusion à laquelle la règle donne accès[10], suivi d'un numéro qui correspond simplement à l'ordre chronologique selon lequel les différentes règles de même conclusion ont été abordées en classe.
On aura ainsi, **perpendiculaires-0**, **perpendiculaires-1**, **perpendiculaires-2**, etc.

10 … parce que dans la phase de recherche d'une démonstration, on cherche le plus souvent de quel résultat on a besoin pour obtenir la conclusion visée, que cette conclusion soit ce qu'on veut montrer ou une étape intermédiaire y menant.

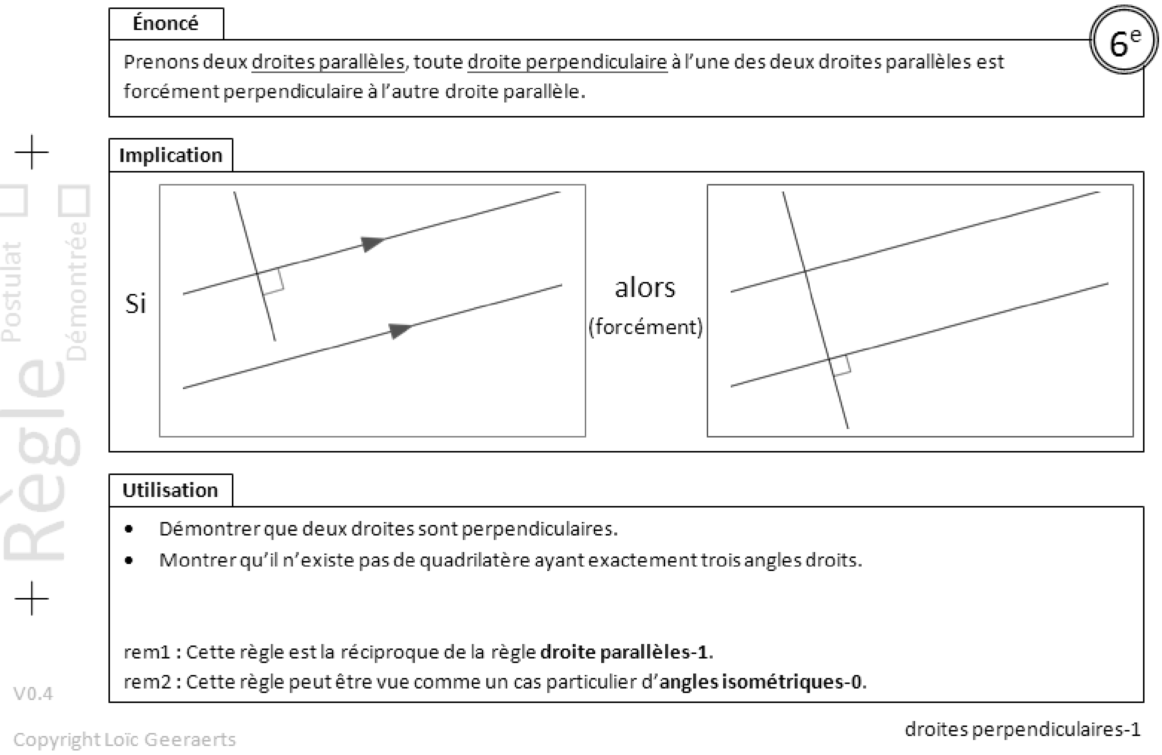

Figure 2. *Une fiche-règle*

3.3. Les fiches-définitions

La définition d'un objet géométrique associe un groupe nominal à une condition nécessaire et suffisante. Celle-ci est constituée d'une seule propriété caractéristique (par exemple, avoir quatre angles droits) ou d'une conjonction minimale de propriétés simples[11] (par exemple, avoir quatre angles droits et quatre côtés isométriques). Impliquer les élèves dans la construction de l'édifice géométrique, c'est en particulier les impliquer dans l'élaboration des définitions (de Villiers, 1998), et donc dans le choix de la propriété caractéristique à retenir. La classe en cherche généralement une qui soit la plus naturelle possible, proche de ce que le sens commun, l'étymologie ou le bagage issu du primaire suggèrent. L'enseignant peut de son côté rappeler les exigences de « minimalité » qui ne vont pas de soi pour les élèves (cf. §2.1), et s'assure bien sûr de la cohérence avec les définitions et les règles construites auparavant.

Comme dans toutes les fiches, l'énoncé est appuyé de figures, favorisant la coordination entre les représentations du même objet dans les registres discursif et figural (Duval, 1993). Ces figures proposent bien sûr des exemples mais aussi des contre-exemples, des exemples de ce que l'objet *n'est pas*. Comme le montrent Grenier et Tanguay (2008), en effet, la tendance de l'enseignement secondaire à négliger la question du contre-exemple a des conséquences préjudiciables, notamment sur l'apprentissage de la preuve : « tout est toujours 'vrai et calculable' en [classe de] mathématiques » (op. cit., p. 42).

11 Nous entendons par propriété simple une propriété nécessaire mais non suffisante.

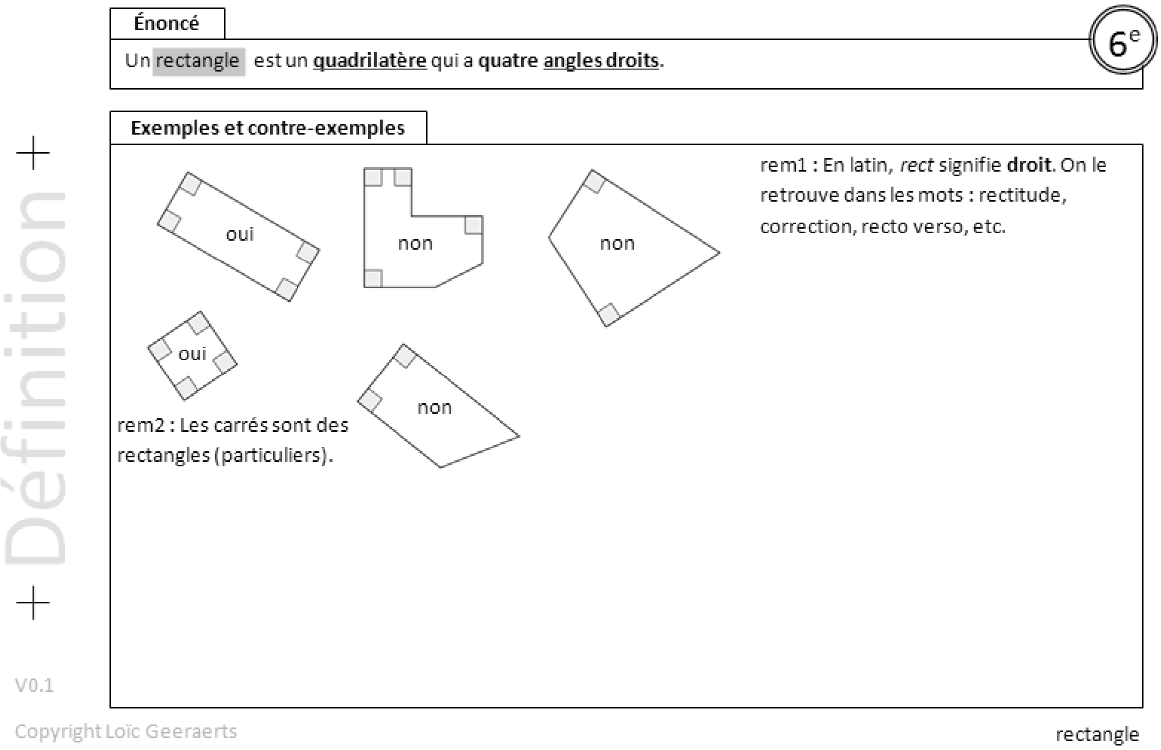

Figure 3. *Une « fiche-définition »,*
réalisée par Loïc Geeraerts avec des élèves de 11-12 ans à partir de 2002

3.4. Les fiches-règles

Les fiches-règles permettent elles aussi d'articuler l'énoncé à sa représentation figurale, la règle y étant illustrée par des « figures-clés » (Kerboeuf et Houdebine, 2005). Celles-ci permettent entre autres le repérage et le codage dans les figures données au départ d'un problème de démonstration. Certes, les deux figures-clés (l'antécédent et le conséquent) illustrent la règle et en précisent la signification. Mais elles favorisent aussi le contrôle sémantique de l'organisation syntaxique des énoncés retenus dans la phase de recherche d'une démonstration, qui peut être conduite sans perdre de vue la figure (cf. infra, §3.5 et aussi Tanguay, 2007, §3.2, point 1). La disposition gauche-droite des deux figures-clés rend visible une possible sériation des énoncés sous-jacents, et cette idée est renforcée par un code de couleur : vert pour les codages dans l'antécédent, rouge pour les codages dans le conséquent. On aura compris que ce choix n'est pas anodin, le vert suggérant l'idée que « quand les conditions sont vérifiées, tu peux y aller et tirer la conclusion », le rouge signalant au contraire qu'il faut s’arrêter temporairement, avant que la conclusion ne soit recyclée en condition pour l’inférence suivante.

Contrairement à ce qu'il en est dans les schémas proposés par Kerboeuf et Houdebine, le codage de l'antécédent n'est pas repris dans le conséquent. Ceci permet de ne pas surcharger la figure de droite afin qu’elle conserve son statut de figure-clé, ce qui aura son importance lors du mécanisme de recyclage. De surcroît, cela permet d'identifier visuellement et sans ambiguïté chaque fiche-règle par la conclusion à laquelle elle donne accès, ce qui permet un travail « à rebours » de la démonstration (cf. Tanguay, 2007, §3.2, point 2). Il est à noter que même quand il y a une équivalence sous-jacente, on fait deux fiches distinctes, une pour chaque implication. On remarquera l'ajout de l'adverbe « forcément », qui rend explicite le caractère obligatoire de la conclusion. En effet, notre expérience d'enseignement nous a montré que certains élèves interprètent les « si… alors… » comme « il se peut que », comme un énoncé contingent plutôt que nécessaire.

Les règles fichées font toutes l'objet d'une validation soit expérimentale, soit déductive. Le type de validation est souligné en cochant au crayon de bois la case correspondante en haut à gauche. Quand on passe du statut de postulat à celui de règle démontrée, on peut revenir cocher la première case et gommer l'autre coche. Notons que la démarche inverse n'a pas de sens quand on construit une théorie.

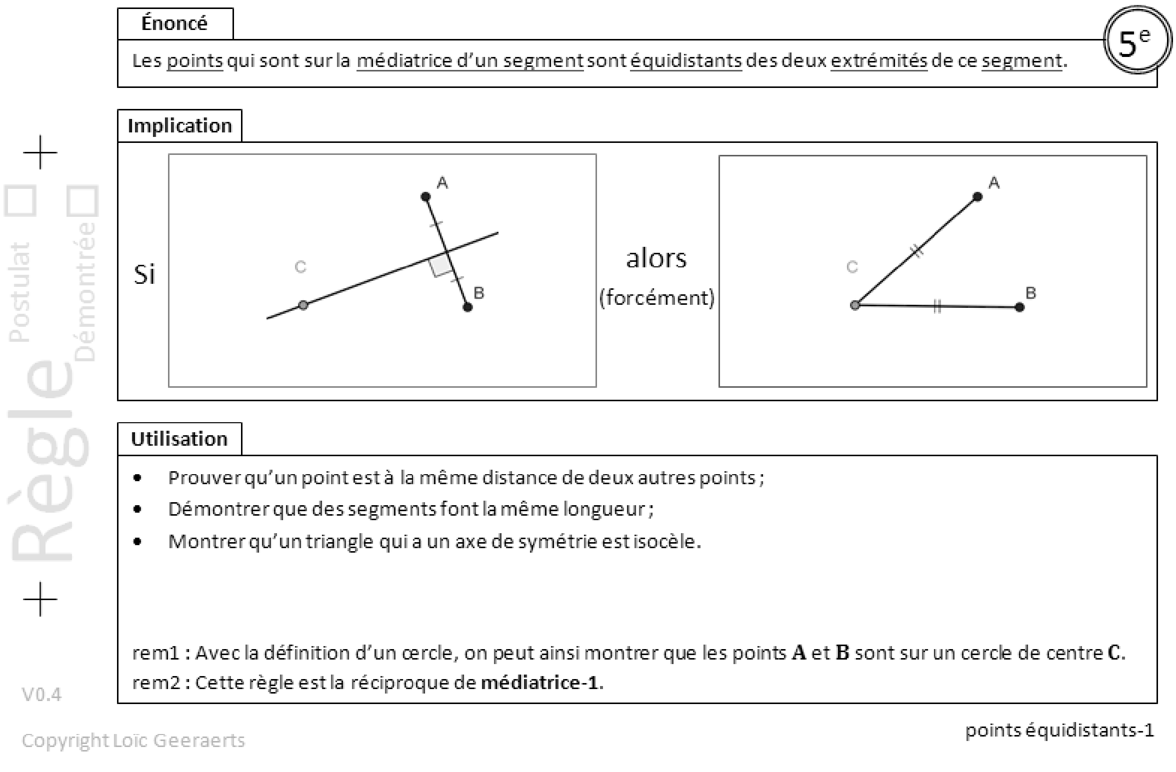

Figure 4. *Deux figures-clés dans une fiche-règle*

Dès qu'une fiche-règle est produite, travaillée et intégrée au classeur, elle est considérée comme valide (règle démontrée ou postulat) et peut être utilisée à tout moment. Le classeur est donc le reflet tangible et concret de l'édification théorique menée par la classe. Pour élaborer des démonstrations, les élèves savent donc exactement sur quoi ils peuvent s'appuyer. Cependant, ils peuvent aussi ressentir le besoin d'utiliser des règles qui ne figurent pas encore dans le classeur, et ils peuvent alors les proposer à la classe comme cibles de travail (expérimental ou déductif). Globalement, le corpus des savoirs disponibles est donc mieux contrôlé, et moins susceptible de donner lieu à des ruptures (implicites) de contrats.

3.5. L'utilisation des fiches en démonstration

Les idées principales qui sous-tendent l'utilisation des fiches sont les suivantes :

1. Reconnaissance visuelle, grâce aux figures-clés, des conditions d'applications de chaque règle et des conclusions intermédiaires dans la sériation.
2. Manipulation matérielle (et donc directe, sans passer par une liste dont les règles écrites ne sont manipulées que mentalement) des règles d'inférence afin d'organiser physiquement la structure déductive (Gaud et Guichard, 1984).
3. Institutionnalisation forte, lors de la construction et de l'utilisation d'une règle, même quand sa validation n'a été qu'empirique. Participation de la classe à l'organisation globale des énoncés dans la théorie géométrique en construction et intégration du mesurage à cette démarche.
4. Contrôle des règles qui sont mobilisées pour un problème de démonstration donné :

   a. De la part de l'enseignant (dans différents types de scénarios) :

   - Donner les fiches nécessaires et suffisantes en indiquant aux élèves combien de fois chacune sera utilisée.
   - Donner les fiches nécessaires et suffisantes sans indiquer aux élèves combien de fois chacune sera utilisée[12].
   - Donner des fiches suffisantes, dont certaines pourront s'avérer inutiles.
   - Demander aux élèves de déterminer individuellement l'ensemble des fiches suffisantes ; construire ensuite une démonstration en groupe-classe.
   - Travailler sur une démonstration en cherchant à réduire le nombre de règles utilisées ; chercher des variantes de résolution d'un même problème de démonstration.
   - Faire analyser des preuves données textuellement, en demandant par exemple aux élèves d'identifier quelles fiches sont utilisées, combien de fois et où. Etc.

   b. De la part des élèves : que dois-je démontrer ? Quelles sont les données ? Qu'ai-je le droit d'utiliser ? Dans quel sens cela fonctionne-t-il ? À quelle règle cette conclusion me donne-t-elle accès (contrôle du recyclage) ? Quelle règle me permet d'accéder à cette conclusion (travail à rebours) ? Etc.

L'utilisation des fiches permet de coordonner le travail sémantique sur la figure avec le travail syntaxique sur les énoncés. L'élève peut en effet traduire par le codage les données et la thèse (ce qu'il faut démontrer) dans deux copies de la figure, et identifier les règles — il les sort alors du classeur — qui lui permettent de passer d'une figure-clé à l'autre en prenant en compte le sens de l'implication : soit qu'il parte des données, conditions d'application instanciées dont il infère la conclusion associée, que ce soit la conclusion finale ou une conclusion intermédiaire qui l'en approche ; soit qu'il parte de la conclusion finale et remonte pas à pas vers les règles et leurs conditions d'applications ; soit plus généralement qu'il mêle

12 Nous avons en effet rencontré dans notre enseignement des élèves convaincus qu'une même règle ne peut être utilisée plus d'une fois dans une même démonstration.

les deux procédures et cherche à « connecter » les deux chemins. Si la trace « sémantique » du parcours est brouillée par le cumul des codages dans la figure — encore que l'élève pourrait décider d'esquisser et coder une nouvelle figure à chaque pas — la trace « syntaxique », elle, est (au moins en partie) conservée par les fiches que l'élève a alignées sur son bureau, dans l'ordre où il les a sorties.

Nos expériences d'enseignement nous ont montré que la connaissance procédurale qui consiste à coder successivement sur une même figure les conclusions intermédiaires jusqu'à obtenir la conclusion finale, n'est pas garante de l'aptitude à bien construire la structure déductive sous-jacente. Pour l'avoir vérifié (informellement) pendant cinq années d'enseignement, nous affirmons que l'organisation physique des règles sur l'espace de travail facilite la mise en place de la sériation attendue. Pour permettre à l'élève de mieux en contrôler encore la structure fine, tout en minimisant le brouillage causé pas le « discursif », nous avons également mis en place un travail parallèle sur des *déductogrammes* (Duval, 1991 ; Tanguay, 2005), selon le format que nous allons décrire ci-dessous. Mais d'abord, une mise au point s'impose : nous sommes d'accord avec Duval que les déductogrammes doivent rester des objets transitionnels, comme nous sommes d'accord avec d'autres pour dire qu'il ne suffit pas, loin s'en faut, d'imposer un format de structure ternaire — « je sais que, … or, … donc », déductogramme ou tout autre — pour régler tous les problèmes que pose l'enseignement de la démonstration. Le travail sur les déductogrammes aide certains élèves, peut être une source de complexification pour plusieurs comme il peut rester inintelligible pour d'autres.

Dans le format que nous proposons, les trois statuts opératoires — proposition d'entrée, règle d'inférence, conclusion (ou proposition inférée) — y sont distingués graphiquement (voir Annexe). Une boîte verte encadre les propositions d'entrée et matérialise leur conjonction. La flèche-inférence part du bord de ce cadre vert et passe à travers un label elliptique identifiant la règle par le nom de la fiche correspondante. La flèche-inférence pointe sur le bord d'un cadre rouge qui contient la conclusion. Quand celle-ci est recyclée en proposition d'entrée pour une inférence qui suit, elle est encadrée avec les autres propositions d'entrée dans un cadre vert englobant ; et en particulier toujours extérieur aux cadres rouges. Ainsi, systématiquement, les flèches partent du bord d'un cadre vert et pointe sur le bord d'un cadre rouge, selon un code de couleurs qui reprend celui des fiches. Et le recyclage (Duval, 1991) est visuellement explicité sous la forme d'un cadre vert englobant au moins un cadre rouge.

Exemple. Supposons qu'on veuille démontrer que « dans tout triangle rectangle, le segment qui joint le sommet de l'angle droit au milieu de l'hypoténuse a une longueur qui est la moitié de celle de l'hypoténuse. » On considère pour cela un triangle ABC, rectangle en B, et on nomme M le milieu de $[AB]$. Il s'agit donc de montrer que $BM = AM = MC$. Voir à l'Annexe deux déductogrammes donnant accès à cette démonstration. Dans chacun, les cadres en pointillés seraient des cadres verts et les cadres en traits doubles seraient rouges. La règle *Perpendiculaires 1* est celle dont la fiche est présentée en §3.2, celle de *Équidistants 1* étant présentée en §3.4. On suppose que la définition de la *Médiatrice* retenue ici est « la droite perpendiculaire au segment et qui passe par son milieu. »

Pour faire le déductogramme de gauche, on aurait au préalable placé le point *N* au milieu de [*BC*], comme dans la figure codée en haut à gauche ci-dessous. Pour faire le déductogramme de droite, on aurait au préalable tracé la parallèle à (*AB*) passant par *M* et nommé *X* son point d'intersection avec [*BC*], comme dans la figure en bas à gauche ci-dessous. La figure de droite montre (en même temps) tous les codages accumulés dans la phase de recherche de la démonstration.

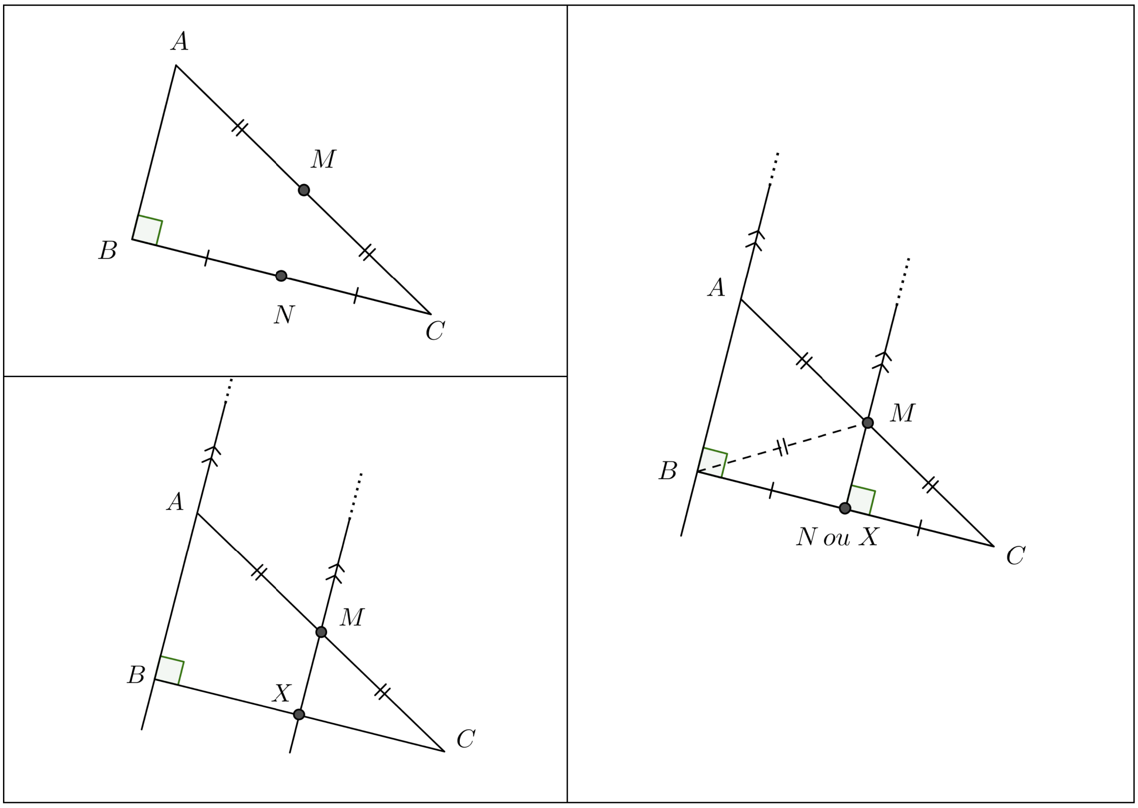

Figure 5. *Deux figures de départ possibles (à gauche), donnant lieu à la même figure codée (à droite) à la fin du processus de recherche de la démonstration*

Remarques

1. Cette démonstration requiert d'ajouter des éléments à la figure initiale, ce qui n'est pas une difficulté négligeable pour la majorité des élèves. Selon le niveau des élèves et le scénario envisagé par l'enseignant, celui-ci peut décider ou non de laisser ces ajouts à la charge des élèves.
2. Notre expérience d'enseignement nous a montré que dans ce type de démonstration, des élèves qui, par exemple, ont repéré qu'ils peuvent utiliser la définition de la médiatrice pour conclure avec la règle *Équidistant 1*, pensent que faire intervenir le point *N* milieu de [*BC*] est une façon d'utiliser la conclusion à l'intérieur de la démonstration, et que cela constitue une faute de raisonnement.
3. Grâce aux déductogrammes, on remarque que la démonstration modélisée par le déductogramme de gauche (voir Annexe) est linéaire du point de vue des enchaînements

déductifs, alors que celle à droite a une structure en arbre. On pourrait ainsi être porté à penser que la première est plus facile. Cependant, le type de difficultés cité au point 2 intervient moins explicitement dans la preuve de droite.

4. Conclusion

Sans être en tous points aussi explicitement déclinés que dans ce qui précède, les éléments d'opérationnalisation décrits ont été mis en œuvre dans des classes de niveaux sixième et cinquième à Amiens pendant près de cinq années. Nous avons alors pu évaluer les progrès des élèves en démonstration comme étant significatifs, leur travail en géométrie plus riche, leurs implication et intérêt nettement accrus. Des expérimentations plus systématiques sont par ailleurs maintenant en cours, dans le cadre d'un projet de recherche[13] mené à l'UQAM et dans des écoles secondaires montréalaises.

Nous n'avons bien sûr traité ici que de certains aspects du projet : d'autres questions et problèmes y sont sous investigations, et seront vraisemblablement abordés dans des publications à venir. Parmi ceux-la, la place que peuvent avoir les logiciels de géométrie dynamique dans le paradigme du physicien-géomètre. On peut penser que leur utilisation comme outil de *construction* et d'*exploration* sera sensiblement celle qu'on leur donne dans l'enseignement actuel de la géométrie du secondaire. Par contre, il est clair qu'en tant qu'outil de *validation*, les types de vérifications auxquels ces logiciels donnent (expérimentalement) accès sont spécifiques et ont auprès des élèves un statut très particulier : un élève du début du secondaire qui lit « 90° » ou qui voit deux lignes se croiser[14], à l'écran *Cabri* ou *GeoGebra* de son ordinateur, ne mettra jamais en doute l'exactitude ou la précision de ce qu'il a vu. Il faut bien sûr prendre ceci pleinement en compte, en abordant explicitement le problème de l'exactitude de la représentation graphique et des mesures fournies par ces logiciels : un écran d'ordinateur reste une matrice discrète quelque soit le niveau de précision du logiciel, de même que les développements décimaux produits y sont nécessairement finis. La question de savoir comment aborder, discuter et intégrer ces questions en classe reste pour nous entière et pourrait donner lieu à une étude en soi.

Globalement, sur une échelle d'une ou plusieurs années, il y a bien sûr le problème des énoncés à retenir, de l'ordre dans lequel ils s'enchaînent, du type de validation à associer à chacun — expérimentale ou déductive, et dans chaque cas sous quelle forme précise —, des questions qu'on souhaite soumettre à la classe et autour desquelles le travail va s'articuler. Il s'agit donc ici de préparer et d'expérimenter des séquences d'enseignement qui, selon notre perspective, peuvent difficilement être isolées et ne porter que sur quelques leçons.

Dans nos expérimentations passées (Tanguay, 2005, 2007), nous avons pu constater que les élèves les plus performants ont été ceux qui ont reconstitué « à reculons », en remontant de la

13 Projet CRSH du Canada n° 169912.

14 Du point de vue théorique, il est intéressant de constater que l'on rejoint ici certaines préoccupations de Hilbert concernant l'intersection d'une droite qui passe à l'intérieur d'un cercle avec ce cercle, intersection qui peut ne pas exister dans le plan $\mathbb{Q}^2$ par exemple. Ces considérations donnent lieu dans la géométrie de Hilbert aux *axiomes de continuité*.

fin vers le début, les structures déductives travaillées. De même que l'édification théorique reproduit, à l'échelle globale, la sériation/organisation des énoncés de façon analogue à celle qui prévaut pour les propositions à l'échelle locale de chaque démonstration, nous sommes d'avis que le mode de travail « à reculons » doit prévaloir aussi si possible à l'échelle globale, dans le sens suivant : il s'agit idéalement de soumettre d'emblée des énoncés relativement contre-intuitifs, où l'empirisme est moins décisivement concluant et où se pose un « enjeu de vérité » (Grenier et Payan, 1998), pour ensuite « remonter » vers les énoncés plus intuitifs, desquels le paradigme du physicien-géomètre ferait ses « postulats » et qui seraient soumis à la classe pour vérifications expérimentales. Mais les enseignants le savent bien, ces énoncés contre-intuitifs sont difficiles à trouver en géométrie et cela fait partie des problèmes que pose son enseignement !

C'est là que, selon nous, la façon de prendre pleinement en compte le mesurage sans le disqualifier, dans tout le processus de validation, permet de reconsidérer les enjeux de vérité pour leur intégrer, de façon explicite et déclarée, les questions :

- de la fiabilité de la mesure,
- de l'exactitude par opposition à l'approximation,
- de la certitude apodictique (celle apportée par la démonstration) par rapport à la certitude expérimentale,
- du théorique par rapport à l'empirique.

Ces questions sont mises au premier plan et sont intégrées aux démarches de preuve et de construction de l'édifice géométrique, au sens où ce qui était simplement (et presque automatiquement) « admis » en *Géométrie axiomatique naturelle* est maintenant, selon le paradigme du physicien-géomètre, vérifié empiriquement et accepté sous des réserves qui sont ouvertement mises sur la table, discutées, problématisées. Nous affirmons qu'en fait, l'enseignement institutionnel a tendance à évacuer ces questions. Il nous apparaît symptomatique que celui-ci réprouve par exemple haut et fort des égalités comme $\frac{4}{3}=1{,}33$ ou $\sqrt{2} = 1{,}414$, alors qu'il accepte sans broncher une égalité comme $AB = 5$ cm dans des contextes où mesures déduites et mesures déterminées aux instruments sont allègrement mêlées.

Nous faisons par ailleurs le pari que le mode de travail mis en avant sensibilisera à moyen terme les élèves au plaisir de voir la géométrie s'édifier, le réseau déductif se ramifier et gagner en complexité et qu'ultimement, la simple satisfaction intellectuelle (Balacheff, 1987) poussera l'élève à adhérer à cette position où le « déductif » prime sur le « perceptif ».

Bibliographie

BALACHEFF N. (1987) Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 18, n° 2, pp. 147-176.

BARRIER T., DURAND-GUERRIER V. & BLOSSIER T. (2009) Semantic and Game-Theoretical Insight into Argumentation and Proof. In F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna & M. de Villiers (éds), *ICMI Study 19 Conference Proceedings*, vol. 1, pp. 77-82.

BKOUCHE R. (1988) *Enseigner la géométrie, pourquoi ?* IREM de Lille, pp. 1-13.

BROUSSEAU G. (1998) *Théorie des situations didactiques.* Éditions La pensée sauvage, Grenoble.

CHOQUET G. (1964) *L'enseignement de la géométrie*. Hermann, Paris.

CORI R. et LASCAR D. (1994) *Logique mathématique*. Coll. *Axiomes*. Masson, Paris.

CROWLEY M. L. (1987) The van Hiele Model of the Development of Geometric Thought. In *Learning and Teaching Geometry, K-12*, 1987 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), pp. 1-16.

DE VILLIERS M. (1998) To teach definitions in geometry or to teach to define? In A. Olivier & K. Newstead (éds), *22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 2, pp. 248-255. Stellenbosch, Afrique du Sud.

DURAND-GUERRIER V. (2008) Truth versus validity in mathematical proof. *ZDM, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,* 40 (3), pp. 373-384.

DUVAL R. (2005) Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, n°10, pp. 5-53.

DUVAL R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, n°5, pp. 37-65.

DUVAL R. (1991) Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational studies in Mathematics*, vol. 22, pp. 233-261.

GAUD D. et GUICHARD J.-P. (1984) Apprentissage de la démonstration, *Petit x*, n°4, pp. 5-25.

GRENIER D. et TANGUAY D. (2008) L'angle dièdre, notion incontournable dans les constructions pratique et théorique des polyèdres réguliers. *Petit x*, n°78, pp. 26-52.

GRENIER D. et PAYAN C. (1998) Spécificités de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes. *Recherches en didactiques des mathématiques*, vol. 18, n°1, pp. 59-99.

HOUDEMENT C. et KUZNIAK A. (2006) Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives,* n°11, pp. 175-193.

HOUDEMENT C. et KUZNIAK A. (2003) Quand deux droites sont « à peu près » parallèles ou le versant géométrique du « presque égal ». *Petit x*, n°61, pp. 61-74.

JAHNKE H. N. (2010) The Conjoint Origin of Proof and Theoretical Physics. In G. Hanna, H. N. Jahnke & H. Pulte (eds), *Explanation and Proof in Mathematics, Philosophical and Educational Perspectives*. Springer, New-York

JAHNKE H. N. (2007) Proofs and hypotheses. *ZDM, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,* 39 (1 – 2), pp. 79-86.

KERBOEUF M. P. et HOUDEBINE J. (2005) Les figures-clés : une idée pour l'apprentissage de la démonstration en Quatrième. *Repères IREM*, n°59, pp. 83-103.

KUZNIAK A. (2010) Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de la scolarité obligatoire en France. *Proceedings of the First French-Cypriot Conference of Mathematics Education,* University of Cyprus, pp. 71-89.

PARZYSZ B. (2006) La géométrie dans l'enseignement secondaire et en formation de professeurs des écoles : de quoi s'agit-il ? *Quaderni di Ricerca in Didattica,* n°17. G.R.I.M., Université de Palerme, Italie.

PÓLYA G. (1989) *Comment poser et résoudre un problème.* Éditions Jacques Gabay, Paris.

ROUCHE N. (1989) Prouver : amener à l'évidence ou contrôler des implications ? In *La démonstration mathématique dans l'histoire*. Colloque Inter-Irem Épistémologie et histoire des mathématiques, pp. 8-38. Besançon, France.

TANGUAY D. (2007) Learning Proof: from Truth towards Validity. Proceedings of the Xth *Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (RUME), San Diego State University. San Diego, Californie. Sur le Web : http://www.rume.org/crume2007/eproc.html

TANGUAY D. (2006) Comprendre la structure déductive en démonstration. Revue *Envol*, n°134, pp. 9-17.

TANGUAY D. (2005) Apprentissage de la démonstration et graphes orientés. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, n°10, pp. 55-93.

TANGUAY D. (2002) Analyse des problèmes de géométrie et apprentissage de la preuve au secondaire. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et de la technologie*, Vol. 2, n°3, pp. 371-396.

THOM R. (1974) Mathématiques modernes et mathématiques de toujours, *suivi de* Les mathématiques « modernes », une erreur pédagogique et philosophique ? In *Pourquoi la mathématique ?*, sous la dir. de Robert Jaulin, pp. 39-88. Éditions 10-18, Paris.

VADCARD L. (1999) La validation en Géométrie au collège avec CABRI-Géomètre, mesures exploratoires et mesures probatoires. *Petit x*, n°50, pp. 5-21.

WENGER E. (1998). *Communities of practice*. Cambridge University Press, Cambridge, Royaume-Uni.

ANNEXE

Deux déductogrammes, pour la preuve que « dans tout triangle rectangle, le segment qui joint le sommet de l'angle droit au milieu de l'hypoténuse a une longueur qui est la moitié de celle de l'hypoténuse. »