REFLEXIONS DIDACTIQUES AUTOUR D'UNE SITUATION D'ENSEIGNEMENT DE L'EQUATION DE LA DROITE

Ruhal FLORIS
Collège Voltaire et
FAPSE Université de Genève (Suisse)

1. Introduction

Cet article présente un travail d'ingénierie didactique développé à partir d'une idée de situation d'enseignement de l'équation fonctionnelle de la droite y = mx+n. Nous avons ainsi élaboré, dans une perspective d'innovation, deux séquences didactiques complètes intégrant l'utilisation de l'ordinateur [1]. Pour nous aider à effectuer certains choix, nous avons essayé de nous référer à la théorie des situations de Guy Brousseau. C'est de quelques-uns des thèmes de cette réflexion que nous nous proposons de discuter ici [2].

Afin de donner un certain ordre à l'exposé, nous prenons le parti de le présenter comme un exercice d'application d'un cours théorique de didactique, celui donné par Michèle Artigue lors de la Vème école d'été de didactique des mathématiques sur l'ingénierie didactique (Artigue 91).

Après présentation de la situation dont nous sommes partis, ainsi que des premières expériences faites avec des élèves (§ 2), nous suivons le schéma d'organisation du cours cité ci-dessus, en proposant nos réflexions épistémologiques et didactiques. S'agissant d'un exercice, celles-ci ne sont qu'ébauchées (§ 3). Elles mériteraient une étude beaucoup plus approfondie.

La troisième partie de cette article est consacrée à une analyse a priori de la situation didactique principale, qui s'est avérée, pour nous, d'une grande richesse, tant du point de vue théorique qu'expérimental (§ 4).

Finalement, plusieurs travaux ayant déjà présenté des expérimentations et des observations de type micro-didactique (voir Bevacqua-Floris 89, Floris, Gruner, Rochat 91, Schubauer 89), nous nous limitons à discuter ici l'aspect global des séquences, c'est-à-dire la question de l'équation de la droite comme outil de résolution de problèmes (§ 5).

---

[1] Voir le document collectif GEMAO (1991), contenant également les logiciels programmés dans le langage auteur GEOM.

[2] Je profite de remercier ici, pour leur contribution à ces réflexions, Jean Brun, François Conne, Gisèle Lemoyne, Richard Schubauer, Laura Weiss.

2. Une situation didactique

L'équation fonctionnelle de la droite :

$$y = mx + n$$

fournit au mathématicien, et à l'élève expert, la possibilité de déterminer si un point, connu par ses coordonnées, appartient ou non à la droite.

En partant de cette remarque, et dans une perspective constructiviste, nous avons construit une situation didactique (dénotée SITP par la suite), que nous avons implémentée sur ordinateur, afin de rendre difficile sa résolution par simple prolongement des droites (voir figure 1).

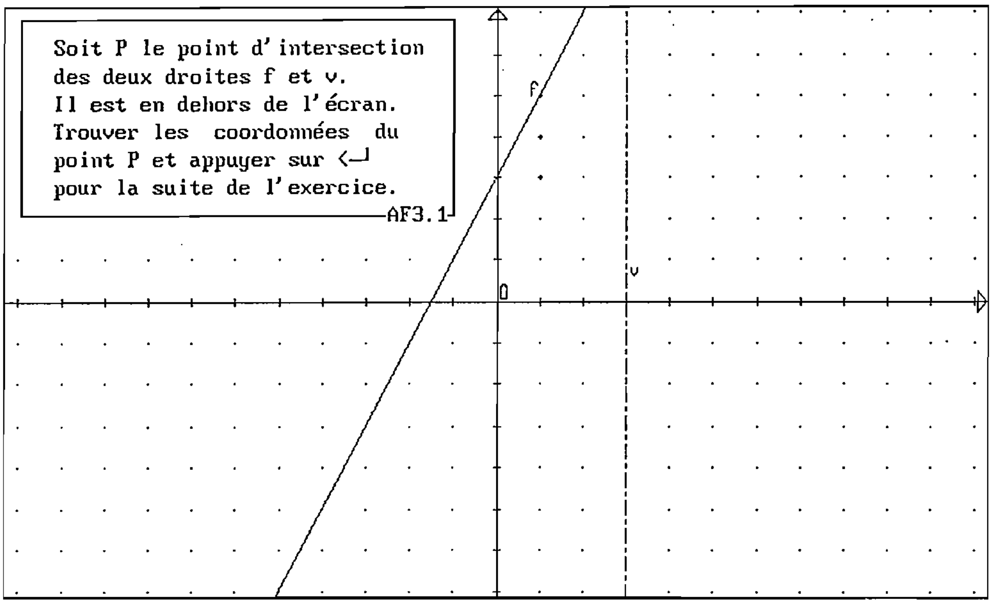


Fig. 1. La situation principale **SITP**.

Nous reprenions ainsi, dans une nouvelle perspective, un problème de géométrie assez connu. Mais le milieu mis en place modifie complètement le problème, avec la présence d'un réseau de points, la possibilité d'y faire circuler un curseur en actionnant les flèches de direction du clavier et le tracé des axes cartésiens. Dans ce contexte, une procédure de résolution par construction géométrique n'est guère probable (tout comme l'inverse, d'ailleurs !).

Notre idée initiale était de faire lire l'équation de la droite comme un parcours dans le réseau de points. Nous considérions ainsi l'écriture $y = N + \frac{x}{H} V$ à lire comme étant l'ordonnée à l'origine N à laquelle on ajoute V fois la valeur $\frac{x}{H}$, où V et H sont les longueurs des cathètes[3] d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse est contenue dans la droite (voir la figure 2).

[3] Le terme de cathète désigne un côté de l'angle droit. Il est d'usage courrant en Suisse Romande.

L'objectif était que l'élève détermine les valeurs de V et de H et qu'il se rende compte que le nombre de longueurs H entre les deux droites verticales, correspondant à x/H, lui permet de calculer l'ordonnée du point d'intersection, en multipliant ce nombre par V puis en ajoutant la valeur N.

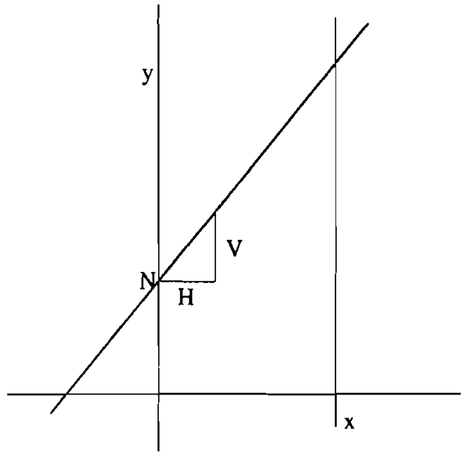


Fig. 2.

Spécifions que les valeurs numériques choisies étaient telles que dans les premières situations proposées tous les nombres, y compris x/H, sont des entiers.

C'est autour de ce noyau que nous avons construit nos séquences, en amont pour une étude de la notion de pente[4] d'une droite et de ses propriétés et en aval avec les problèmes que permet de résoudre la connaissance de l'équation de la droite (voir l'annexe I pour un résumé des séquences).

Ces séquences ont été "expérimentées" plusieurs fois et dans différents contextes (élèves scientifiques ou non, n'ayant pas rencontré l'application affine auparavant ou l'ayant étudiée de la façon habituelle). La première fois, la situation s'est révélée trop 'chargée' et l'intervention du maître a été nécessaire pour aider les élèves à comprendre les consignes et même pour leur fournir l'indice manquant : utiliser la propriété de la pente. Mais, curieusement, ce fait, qui aurait pu déformer la signification de la situation, a eu plutôt un effet positif, dans ce sens qu'il a facilité sa prise en charge par les élèves qui lui ont alors donné le statut d'un exercice. Néanmoins, avec la progression des difficultés numériques, les élèves se sont assez rapidement essoufflés, ce qui a amené une intervention plus précoce de l'enseignant, qui a alors proposé l'équation de la droite comme moyen de faciliter la résolution du problème. Cette institutionnalisation trouva des élèves pour une fois fort attentifs (il s'agissait d'élèves d'une classe de transition vers une filière sans bac. Voir Bevacqua-Floris 89).

Par la suite, une situation de préparation a été mise en place afin de faciliter l'entrée des élèves dans la situation principale. Néanmoins, chaque fois que nous l'avons ensuite proposée aux élèves (3-4 fois), nous avons observé un certain blocage : questions à propos de l'énoncé, doutes sur la possibilité de répondre sans

[4] ou coefficient de proportionnalité. Le terme de pente ne semble pas apparaître dans les manuels français; il est introduit, de même que celui d'ordonnée à l'origine, dans l'enseignement des mathématiques en Suisse Romande.

deviner, manifestations d'incompréhension devant les résultats obtenus. Même et - surtout, semble-t-il - les 'bons' élèves, dont on pouvait attendre une certaine aisance ont de la peine. Certains posent et résolvent la proportion mais répondent en oubliant l'ordonnée à l'origine. D'autres parviennent au même blocage en faisant -comme prévu et balisé- usage de la propriété que la pente d'une droite est constante.

La difficulté augmentant (on passe aux nombres rationnels pour la pente et enfin aux nombres décimaux pour la coordonnée à calculer), l'essoufflement finit par se manifester.

L'ingénierie prévoyait une institutionnalisation fondée par les réponses des élèves à la question : "Comment avez-vous obtenu le résultat ? Ecrivez le calcul que vous avez effectué." Or les élèves n'arrivent pas à exprimer ce calcul, même dans un cas très simple. Nous aurions peut-être du le prévoir puisque la situation centrée sur l'action, ne favorisait pas cette formulation. C'est donc le maître qui prend cette dernière en charge (voir annexe I) et qui en déduit l'équation de la droite en renvoyant les élèves aux phases suivantes de la séquence. Nous tenterons d'analyser plus loin ces faits.

En fait nous nous étions posés un problème de didactique : celui de la genèse artificielle des notions de pente et d'équation fonctionnelle de la droite dans le plan. Le problème que nous avions construit devait être résolu par les élèves en utilisant -sans le savoir explicitement- les deux paramètres de l'équation fonctionnelle de la droite y=mx+n. On leur demandait ensuite de formuler l'équation de façon à obtenir une description des calculs effectués. Or les observations que nous pouvions faire nous montrait que l'apprentissage des élèves ne correspondait pas à ce qui avait été imaginé. C'est donc dans le but de mieux comprendre ce qui s'est passé que nous avons entrepris cette étude.

3. Eléments d'analyses épistémologique et didactique

3.1. Analyses épistémologique et historique

Avant l'invention du formalisme algébrique et son utilisation en géométrie puis en analyse (Viete, Fermat, Descartes, Newton), la notion de pente d'une droite (par exemple) ne peut pas avoir le sens qu'on lui donne actuellement. Les problèmes liés au domaine qui nous intéresse ne peuvent pas être formulés ou alors ils trouvent une expression et une solution dans le contexte totalement différent de la géométrie euclidienne. Considérons le problème qui consiste à déterminer si trois points sont alignés ou non. En géométrie euclidienne, les points pourront être donnés comme intersections de droites, par exemple, et la solution fera intervenir une construction géométrique. La possibilité de se donner un point comme couple de nombres ouvre un domaine de traitement entièrement nouveau qui connaît un développement foudroyant. Dès lors, le fait qu'une droite (non verticale) corresponde toujours à l'ensemble des points vérifiant l'équation y=mx+n n'est plus discuté et devient rapidement ce que Tonnelle et Chevallard ont appelé un préconstruit, une propriété "triviale" que l'on ne se préoccupe plus de démontrer [5]. Parallèlement, les problèmes associés se résolvent

[5] Voir Chevallard 85 (91) et Tonnelle 79. En caractérisant la préconstruction, Chevallard parle de "croisement" entre énoncés du langage et situations surdéterminées. Comme le relève F. Conne (Conne 91), ce n'est pas très clair, surtout en regard de la caractérisation de l'algorithmisation comme

en faisant appel à des formules, comme par exemple celle qui permet de déterminer si trois points dont on connaît les coordonnées sont alignés (algorithmisation du traitement allant de pair avec la préconstruction qui permet de substituer complètement les signifiants aux signifiés).

D'autres objets se cristallisent, ainsi le repérage par les nombres négatifs, introduit par Wallis en 1655 déjà et dont on peut aisément comprendre les motivations dès lors que les courbes ne se laissent pas facilement restreindre dans le seul quadrant positif. Et pourtant, nés de la commodité, ces nombres finissent par acquérir une existence propre et deviennent eux aussi des préconstruits.

La géométrie analytique devient un chapitre de mathématiques utilitaires. Dans l'enseignement supérieur, il est souvent inclus dans ces cours fourre-tout destinés aux étudiants des disciplines scientifiques autres que mathématiques et considéré comme cours de moindre intérêt par les mathématiciens.

3.2. Enseignement usuel et ses effets

Les conséquences didactiques de l'évolution du rôle du calcul algébrique et du statut des nombres négatifs ont été longuement décrites par Yves Chevallard dans trois articles de cette revue. C'est ainsi que dans le cursus scolaire, les nombres négatifs sont maintenant introduits avant l'algèbre qui les avait fait naître. En ce qui concerne le sujet qui nous préoccupe, il apparaît en général à la suite des équations linéaires à une inconnue, sans être véritablement relié au domaine algébrique. Assez souvent, la notion de pente est introduite comme exemple de rapport, en tant qu'application des fractions (8ème année en Suisse, 4ème année en France). Dans les manuels français on y associe l'étude de l'application linéaire et des suites proportionnelles.

Préconstruite, la droite $y=mx+n$ n'y paraît guère intéressante à étudier en tant que telle. Il semble surtout que ce soit un bon support pour introduire le vocabulaire associé à la notion de fonction, dans ce cas l'application affine. Le formalisme est immédiatement présenté et commenté, sans qu'il y ait un problème à résoudre. Pour reprendre les termes de F. Conne (91), l'objet est simplement installé.

Dans une telle stratégie d'enseignement, l'important, c'est d'apprendre aux élèves à tracer convenablement des graphiques dans des repères orthonormés, à calculer des images et des préimages (antécédents). Les problèmes géométriques associés sont traités en fait dans un cadre de géométrie vectorielle et analytique, de façon essentiellement algorithmique, dans le style tel problème-telle formule. La relation entre le graphique et l'écriture algébrique est également mise en place par des

---

"coupure" entre énoncés et situations. Comment l'algorithmisation serait-elle ainsi compatible avec la préconstruction? Introduire un nouveau terme ne me semble pas suffisant pour régler le problème. Nous préférons dire que la préconstruction représente un état figé de la dialectique entre situations et énoncés. C'est une cristallisation qui permet d'identifier sans questionnement des situations types à leurs modélisations formelles et de pouvoir appliquer des algorithmes. De là la coupure, puisque le symbole se substitue à l'objet lui-même en faisant disparaître ce dernier: le polynôme est ce que l'on montre, diviser c'est appliquer tel algorithme à partir de telle configuration de symboles. En géométrie -curieuse inversion- c'est la figure dessinée qui joue le rôle de l'objet préconstruit: une droite coupe un cercle en deux points parce que cela se voit sur le dessin comme on "voit" que $x+x = 2x$ parce qu'il y a deux fois la lettre x.

algorithmes : calcul des images, placement dans le repère cartésien et tracé de la fonction obtenue en joignant les points par des segments. Ou bien, positionnement sur l'ordonnée à l'origine puis tracé d'un triangle de pente et prolongement de l'hypoténuse en une droite. Vice-versa, si le graphique est donné, on calcule la pente en utilisant le triangle rectangle dont les sommets sont l'origine, l'ordonnée à l'origine et l'abscisse à l'origine (où un autre triangle lorsque la droite est linéaire). Nous avons été une fois fort surpris de constater combien des élèves avaient été déstabilisés par une tâche de détermination de pente sur un graphique quadrillé mais dépourvu d'axes. Nous retrouvons ici clairement une situation figée par un algorithme au détriment du rapport dialectique existant entre la pente et la droite, rapport caractérisé par la propriété énonçant que la pente peut être déterminée à partir de deux points quelconques choisis sur la droite.

Plus tard, on passe à la formule standard de calcul de l'équation d'une droite passant par deux points dont on connaît les coordonnées ou à celle permettant de déterminer si trois points sont alignés : mathématiques utilitaires, la transposition didactique est ici parfaitement respectée.

3.3. Conceptions des élèves

Dans l'apprentissage que nous étudions, quelles sont les connaissances des élèves qui peuvent être à l'origine de difficultés, voire d'obstacles ? Il y a tout d'abord, ce que l'on peut nommer la confusion vecteur/coordonnée (ou affine/linéaire). Le calcul de la pente d'une droite passant par l'origine peut simplement se faire en considérant le rapport y/x où (x;y) est le repérage d'un point quelconque de la droite ; lorsque la droite ne passe pas par l'origine, il est nécessaire de considérer un vecteur parallèle à la droite donné par deux points et non un seul. Le manuel scolaire genevois prend en compte cette difficulté en introduisant la fonction affine par le cas plus général d'une fonction non linéaire, option que nous avons également prise dans nos séquences.

Pour de nombreux élèves, les nombres rationnels sont à l'origine de certaines difficultés accentuées par le fait que la pente d'une droite est un rapport et ils ont de la peine à identifier 3/4 et 75%, 2/2 et 1, 0/1 et 0, 100% et 1.

Mais l'obstacle le plus important nous paraît être constitué par certaines conceptions didactiques des élèves du niveau secondaire [6]. Comme le décrit Alain Mercier (92), l'apprentissage effectif pour l'élève ne commence en général qu'avec les exercices d'application, voire avec les premiers devoirs notés. L'élève ne s'intéresse qu'à la "théorie" qui consiste à montrer comment on peut résoudre les exercices. Lors de présentations plus "mathématiques", l'élève se met en position d'attente. En conséquence, il n'est pas d'usage de consacrer beaucoup de temps au travail théorique. Avec une approche constructiviste, on risque de voir beaucoup d'élèves attendre les corrections d'exercices. Ils doivent imaginer la possibilité d'apprendre à travers un nouveau type de dispositif proposé par le maître dans ce but. En d'autres termes, un rapport à l'objet "situation d'apprentissage par adaptation" doit être installé.

---

[6] Et même avant, si l'on en croit ce qu'écrit François Conne (91) à propos de l'enseignement de l'algorithme de la division.

4. Analyse a priori

• Selon Michèle Artigue, le but de l'analyse a priori est de déterminer en quoi les choix effectués permettent de contrôler les comportements des élèves et leur sens. Guy Brousseau (91) précise que "l'enseignement a comme objectif principal le fonctionnement de la connaissance comme une production libre de l'élève dans ses rapports avec un milieu a-didactique". Autrement dit, l'élève doit être capable de fonder ses décisions par des raisonnements et non en se laissant guider par un milieu entièrement fléché, par exemple par un calcul déjà posé.

La notion de milieu totalement a-didactique est une fiction théorique commode. Elle nous est utile en tant que référence pour l'élaboration des situations d'enseignement. Plus ces dernières se rapprochent de la fiction théorique, plus large sera le champ des problèmes que l'élève sera en mesure de résoudre seul. En d'autres termes, le rapport au savoir sera plus proche du rapport "savant" [7].

Ce que nous recherchons donc, c'est un "point de fonctionnement" du système didactique pour lequel les notions de pente, d'équation de la droite dans le plan et d'application affine soient un peu plus construits que préconstruits. L'idée principale est de proposer un contexte dans lequel ces objets mathématiques puissent fonctionner comme des outils permettant de résoudre certains problèmes, du type :

Problème P

On considère la droite contenant les points P = (0;3) et Q = (3;5).
Parmi les points suivants, lequel ou lesquels appartiennent à cette droite ? Pourquoi ?

A = (18;15) B = (18;-15) C = (-18;-9)
D = (51;37) E = (3/5;16/5) F = (933;624)

D'où la condition (variable) globale : la pente et l'équation de la droite devront fonctionner comme outil dans une situation de résolution de problème.

Deux autres variables globales sont liées au milieu matériel, à savoir l'implémentation informatique de nombreuses situations et la présence constante d'un réseau de points (sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$), parfois non représenté, mais ensemble virtuel des positions accessibles par un curseur graphique.

• L'ingéniérie didactique s'articule autour de la situation SITP présentée au début de cet article (voir la figure 1). Initialement, faute de la connaissance visée (équation de la droite), les élèves doivent gérer le problème au niveau du comptage et de la proportionnalité.

La prévision est possible, mais le coût est relativement élevé : double comptage, prise en compte de l'ordonnée à l'origine. Il est nécessaire de satisfaire aux conditions définies par Guy Brousseau :

> L'élève doit être convaincu qu'il peut trouver une réponse autrement qu'en devinant [8].
> L'effort permettant d'obtenir le résultat ne doit pas être trop important (il ne faut pas décourager les élèves à ce moment crucial).

---

[7] Qui n'est pas obligatoirement celui du savoir savant, ce dernier n'ayant pas toujours un rapport savant avec certains objets.

[8] et certains de nos élèves ont avoué qu'ils avaient répondu au hasard.

Ces conditions peuvent être obtenues en faisant varier certaines données (position des droites f et v), réseau de points, affichage de coordonnées : ce sont les variables locales de la situation. C'est en s'appuyant sur elles que devra être résolu le problème posé, par l'utilisation de certaines propriétés liées à la notion de pente ou de vecteur, d'abord, en posant l'équation de la droite ensuite.

La liaison entre le micro-didactique et le macro est obtenue par l'effet d'éloignement, d'absence du point à chercher.

Pour que SITP ne soit pas une devinette, il est donc indispensable qu'un rapport à l'objet "pente d'une droite" soit installé au préalable de telle sorte que l'élève puisse en faire usage, au moins implicitement, pour entrer dans la situation (dévolution). Pour satisfaire cette condition, et permettre ainsi un fonctionnement satisfaisant de la situation principale, nous avons étudié et mis au point la séquence didactique PENTE (voir annexe I). Ce travail peut sans doute être analysé comme une mise en place d'un milieu tant mathématique que didactique (ou plutôt un mélange des deux si l'on pense à l'accent mis sur la détermination de pentes de droites à l'aide du curseur) avec pour objectif mathématique un critère de parallélisme et, du point de vue du contrat didactique, un indice pour l'élève du type de moyens à mettre en oeuvre pour résoudre le problème posé dans la situation principale.

Un tel milieu favorise donc un travail des élèves de type comptage et proportionnalité, à propos d'une représentation graphique d'objets géométriques. La situation de prévision donne un sens à ce travail : les élèves doivent *contrôler le graphique par du numérique.*

Le passage à l'équation de la droite pourrait se faire, classiquement, par la mise en place d'une situation de communication entre groupes d'élèves (sur le modèle des séquences sur les décimaux de Guy Brousseau (1981)). Des situations de formulation (par les élèves) et d'institutionnalisation de y=mx+n pourraient suivre SITP.

Mais pour des raisons d'économie didactique, étant donné les contraintes liées au temps et aux habitudes des élèves du secondaire, contraintes que nous avons évoquées ci-dessus, l'ingéniérie mise en place a prévu ici de précipiter les choses. Formulation et institutionnalisation sont pratiquement fusionnés en une seule séquence qui débouche sur des exercices. C'est ce que provoque l'intervention de l'enseignant fournissant lui-même l'équation de la droite en tant qu'outil permettant de trouver les solutions d'une façon moins coûteuse que par le comptage (les extraits de dialogue d'élèves de l'annexe II donnent une idée de ce coût). Un autre emploi de l'équation de la droite est celui de moyen de vérification de réponses devinées par l'élève. Le contrôle par le numérique laisse ici sa place à un contrôle par l'algébrique. Ceci peut s'analyser en termes de jeu de cadres selon R. Douady (86).

• Se pose alors une question : la situation a-t-elle encore un caractère a-didactique ? Comme c'est le maître qui propose d'utiliser l'équation de la droite, la réponse devrait être non. Mais cette intervention de l'enseignant modifie-t-elle le sens donné par l'élève au savoir visé ? Dans une conception constructiviste "pure", ce devrait être le cas. Néanmoins, historiquement et culturellement, certains formalismes mathématiques qui sont "mis sur le marché" deviennent rapidement des outils pour d'autres que leurs inventeurs. Le sens naît alors de leur pratique. S'il est donc peu probable que l'équation de la droite puisse prendre pour les élèves la signification de "parcours dans le repère" tel qu'imaginé primitivement (voir le début de l'article et l'annexe I), nous ne pensons pas que son caractère "outil" soit hypothéqué par un tel déroulement de la séquence. L'équation est ici seulement *un moyen de produire un résultat* et non un résultat en soi. L'intervention du maître prend le caractère d'une relance. Elle n'est pas une évaluation tendant à bloquer la réflexion de l'élève.

Car, bien que ce soit par rapport à un ensemble de possibles restreint, on y trouve encore de l'a-didactique, dans la mesure où l'élève doit maintenant apprendre à maîtriser l'écriture formelle y = mx + n et les procédures associées (déterminer la pente, l'ordonnée à l'origine et coordonner le tout). D'une certaine manière, l'équation peut être considérée comme un instrument de validation des réponses trouvées par l'élève dans le cadre de la situation principale.

Mais même en supposant que notre analyse soit correcte et que notre situation génère effectivement un rapport plus adéquat à la notion d'équation de la droite, il reste à prouver notre affirmation. *Comment distinguer les produits a-didactiques de notre situation de ceux provenant du contrat didactique ?* Nos observations nous suggèrent quelques éléments de réponse, mais seules d'autres recherches, avec une méthodologie encore à construire, pourront confirmer ou infirmer ce que nous supposons.

5. Données et observations

5.1. Pré-test

Ainsi que nous l'avons indiqué au début de cet article, nous nous limitons à discuter ici de quelques questions globales, comme celle qui vient d'être posée. A l'appui de notre analyse, nous présentons quelques données récoltées lors d'une passation des séquences en 1ère du gymnase à Genève (élèves de 15 ans, programme équivalent à celui de la troisième française).

Nous avons soumis aux élèves un pré-test dont une grande partie des questions pouvaient être résolues graphiquement. Peu après la fin de l'enseignement sur l'équation de la droite, dans le cadre d'une évaluation notée, nous avons redistribué aux élèves leurs copies du pré-test, en leur demandant de compléter et de modifier éventuellement leurs réponses. L'une des questions était une variante du problème P, celui que nous avons cité au début de l'analyse a priori et où il s'agit de déterminer si une droite définie par deux points contient ou non d'autres points donnés. La question est relativement ouverte. Elle ne fait pas directement allusion à l'équation de la droite, allusion que l'on retrouve fréquemment dans certaines versions scolaires du problème, avec une première sous-question demandant d'établir l'équation de la droite passant par les deux points donnés[9].

Une confirmation du caractère ouvert de la question est donnée par les nombreux types de traitement constatés. Lors de la passation en pré-test, la plupart des élèves commencent par représenter graphiquement la droite donnée et se heurtent à un obstacle : le repérage standard qu'ils utilisent ne leur permet pas de donner une

[9] En fait, le manuel d'enseignement utilisé à Genève ne comporte aucun problème de ce type, ce qui nous semble confirmer notre analyse d'une transposition didactique focalisée sur le concept de fonction. Un manuel français classe une question analogue parmi les problèmes difficiles (Exonathan 3ème, version professeur).

réponse pour tous les points proposés. Certains se bornent ensuite à conclure en fonction du quadrant dans lequel est situé le point donné. D'autres font comme si la droite était linéaire et répondent en conséquence, parfois en considérant un coefficient différent selon la coordonnée afin de pouvoir conclure que le premier point appartient effectivement à la droite, en conformité avec le graphique. Un autre encore cherche des relations arithmétiques (figure 3). Près de la moitié ne répond pas. Un élève parvient à traiter le point éloigné en choisissant une échelle adéquate et une autre en construisant une suite de points de la droite selon une progression arithmétique de chaque composante (figure 4).

5. On considère la droite contenant les points P = (0;3) et Q = (3;5). Parmi les points suivants, lequel ou lesquels appartiennent-ils à cette droite? Pourquoi?

A = (18;15) 18|3 6 15|5 3

oui, 18 et 15 sont divisible pa 3 et 5

B = (18;-15)

non, la drate ne passe pas por ce point

C = (-18;-15)

oui, idema A

D = (-18;15)

non, la droite ne passe pas par ce point

E = (51;37)

non. 51 n'est pas divisible por 6 et 37 par 5.

Fig. 3. Combinaison de procédures arithmétiques et graphiques.

A = (18;15) oui, ce point appartient à cette droite

B = (18;-15) non, il n'y appartient pas

C = (-18;-15) non, il n'y appartient pas

D = (-18;15) non, il n'y appartient pas.

E = (51;37) oui, il y appartient.

la droite des points P et Q constitue une suite logique. la coordonnée horizontale augmente ou diminue toujours de 3 en 3. Et la coordonnée verticale augmente ou diminue constament de 2 en 2. Quelques points se trouvant sur cette droite:

- (-15;-7) - (-8;-9)
- (12;11) - (21;17)
- (30;23) - ...

Fig 4.

Tout se passe comme si le choix des variables permettait constamment un traitement à la limite entre le graphique et le numérique, favorisant le premier pour une partie du problème, mais pas pour le reste. On retrouve bien ici des effets du jeu de cadres que nous avions postulé.

Avec un tel éventail de procédures, allant au delà de notre analyse a priori, il nous paraît possible d'affirmer que la situation est, à ce moment, de type non didactique, le problème étant posé dans le cadre d'un pré-test sans enjeu. Les élèves ne se demandent pas ce qu'on leur demande. Ils font ce qu'ils peuvent, et les plus "scolaires" ne font rien. Quelles sont les conditions pour qu'une telle situation devienne a-didactique [10] ? Il doit tout d'abord y avoir dévolution, l'élève doit admettre qu'il y ait quelque chose à apprendre. Il doit jouer le jeu. En outre, les variables locales de la situation doivent favoriser la formulation de l'équation de la droite. La séquence construite autour de la situation SITP peut être considérée comme une réalisation répondant en partie à ces conditions. Et, pour une paire d'élèves en tout cas, nous avons observé une utilisation systématique de l'équation de la droite une fois qu'elle leur a été proposée.

D'autres réalisations sont certainement possibles. La richesse des productions d'élèves décrites ci-dessus nous fait penser à une ingéniérie de type "situation-problème" avec travail en groupes, rédaction d'affiches et débat, selon les expérimentations et les analyses de l'équipe de l'IREM de Lyon, mais avec des adaptations nécessaires étant donné la différence d'objectif, puisque nous ne nous intéressons pas ici aux règles du débat mathématique [11]. Une telle mise en place devrait au moins aboutir au rejet par la classe de résolutions basées sur la proportionnalité ou sur d'autres règles ad hoc (figure 5). L'apparition dans toutes les classes de procédures analogues à celle de la figure 4 n'est pas certaine, mais en cas d'émergence, nous formulons l'hypothèse qu'elle devrait convaincre l'ensemble des élèves et favoriser l'institutionnalisation visée.

A = (18;15) oui

B = (18;-15) non

C = (-18;-15) oui

D = (-18;15) non

E = (51;37) non

Parce que la différence des points doit être 3. De plus on peut utiliser la règle des signes qui doivent être positifs, vu que aucun point de l'énonce est négatif

Ex : 18 ; 15 + · + = + oui

-18 ; 15 - · + = - non

Fig. 5.

[10] C'est-à-dire pour qu'il y ait un enjeu de savoir déclaré et que les élèves cherchent à apprendre, dans le cadre de la situation.

[11] Voir la brochure collective: Initiation au raisonnement déductif au collège, IREM de Lyon, Presses Universitaires de Lyon, 1992.

5.2. Post-test

Lors de la seconde passation, tous les élèves répondent. Rappelons qu'ils retrouvaient leur copie du pré-test. Presque tous les élèves qui n'avaient alors rien répondu résolvent maintenant le problème en posant une équation de la droite ou quelque chose d'approchant (le "y =" est souvent omis, il ne représente pas le résultat d'un travail de l'élève). On voit apparaître une résolution faite avec l'aide d'un tableau (figure 6).

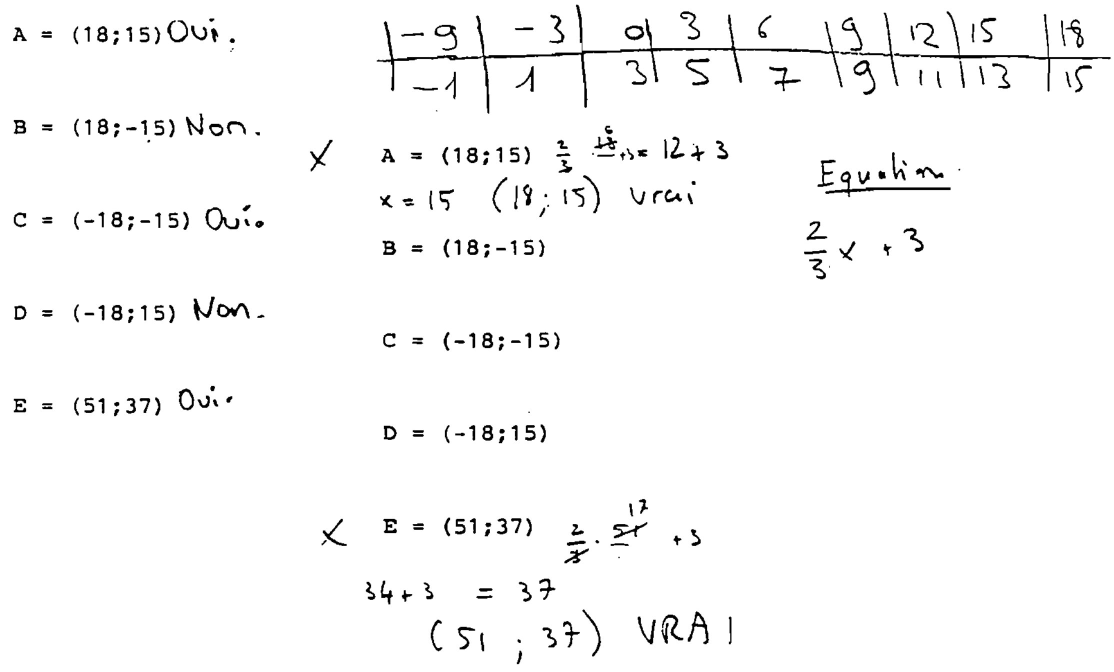


Fig. 6. Deux exemples de réponses données lors du post-test

Les élèves ayant répondu au pré-test confirment la plupart du temps la réponse qu'ils ont faite ainsi que la justification donnée. Il est clair que les élèves savent qu'ils savent résoudre ce genre de problème. L'espace des choix possibles s'est modifié, la procédure avec utilisation de l'équation de la droite s'ajoutant aux autres, mais avec une surdétermination didactique créée par les indices construits tout au long de la séquence d'enseignement.

En résumé, nous constatons que :

1. Le savoir mathématique attendu apparaît.
2. Il reste fragile pour certains élèves: sa reconnaissance n'est pas évidente dans les conditions du problème P.

Du point de vue de la question générale du sens des connaissances construites, ces données ne nous permettent pas de conclure. Des entretiens avec les élèves auraient pu nous fournir des indications importantes mais nous pensons avec Alain Mercier qu'il faudrait aussi tester la capacité des élèves à investir ce qu'ils savent de l'équation de la droite lors d'apprentissages ultérieurs (équation cartésienne généralisée, dérivée et tangente à une courbe). Nous retrouvons donc les difficultés inhérentes à une réelle démarche de validation des hypothèses d'apprentissages de caractère global (Artigue 1990).

Bibliographie

ARTIGUE, M. (1990), Ingéniérie didactique, *Recherche en didactique des mathématiques, Vol. 9.3 pp. 281-307,*. La Pensée Sauvage, Grenoble.

BEVACQUA, G. & FLORIS, R. (1989), Development and classroom experimentation of interactive geometry exercises, *Journal of Computer Assisted Learning 5 pp. 161-176.*

BEVACQUA, G. & FLORIS, R. (1991), GEOM, Didasoft, 31, rue Louis-Favre, 1201 Genève.

BROUSSEAU, G. (1981), Problèmes de didactique des décimaux, *Recherche en didactique des mathématiques,Vol. 2.1 pp. 37-127,* La Pensée Sauvage, Grenoble.

BROUSSEAU, G. (1986), Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherche en didactique des mathématiques, Vol. 7.2 pp. 33-115,* La Pensée Sauvage, Grenoble.

BROUSSEAU, G. (1991), Le contrat didactique : le milieu, *Recherche en didactique des mathématiques, Vol. 9.3 pp. 309-336,* La Pensée Sauvage Grenoble.

CHEVALLARD, Y. (1985, 1991), *La transposition didactique, La Pensée Sauvage, Grenoble.*

CONNE, F. (1991), Début d'un enseignement, début d'un apprentissage : où placer les routines ? *Interactions didactiques, n°12,* Université de Genève et Université de Neuchâtel.

DOUADY, R. (1986), Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherche en didactique des mathématiques, Vol. 7.2 pp. 5-31,* La Pensée Sauvage, Grenoble.

FLORIS, R., GRUNER, C. & ROCHAT J. (1991), GEMAO : géométrie et enseignement des mathématiques avec l'aide de l'ordinateur, Brochure et logiciels, *Dispositif de Recherche du Département de l'Instruction Publique du Canton de Genève, 16 av. du Bouchet, 1209 Genève.*

MERCIER, A. (1992), Episodes et biographies didactiques, *Actes du Séminaire de Didactique de Grenoble, 1991-1992,* Didatech, Grenoble.

SCHUBAUER, R. (1989), Expertise d'une tâche avec GEOM en 1ère de l'ECG, *Didactique des mathématiques,* FPSE, Université de Genève, Genève.

TONNELLE, J. (1979), *Le monde clos de la factorisation au premier cycle,* IREM de Bordeaux et IREM d'Aix-Marseille.

WEISS, L. (1989), Rapport sur une expérience d'E.A.O. en mathématiques, manuscrit, *Cycle d'Orientation de Cayla,* Genève.

Annexe 1 : Présentation des séquences didactiques PENTE et AFFINE

Séquence 1 : PENTE

1.1. SEGMENT

Connaissance visée : Dans un cadre graphique muni d'une grille unitaire, les composantes du vecteur déterminé par un segment orienté, ce que nous appelons **code d'un segment** [12], constitue l'information nécessaire et suffisante au tracé d'un même segment (parallèle, même longueur, même orientation) à partir d'un point donné et alors que le segment initial n'est plus tracé.

Situation d'action proposée : Tracer un segment égal à un segment donné (à l'ordinateur, en amenant un curseur sur les deux extrémités du segment à tracer).

Variables : Eloignement du point à partir duquel le segment doit être tracé. Effacement ou non du segment initial. Direction et longueur du segment. Tracé ou non d'un réseau unitaire de points. En jouant avec ces variables, plusieurs variantes de la situation sont proposées :

1. Segment proche. 2. Segment éloigné (voir les figures ci-dessous). 3. Segment initial qui s'efface. 4. Plusieurs segments sont donnés sur une même figure.

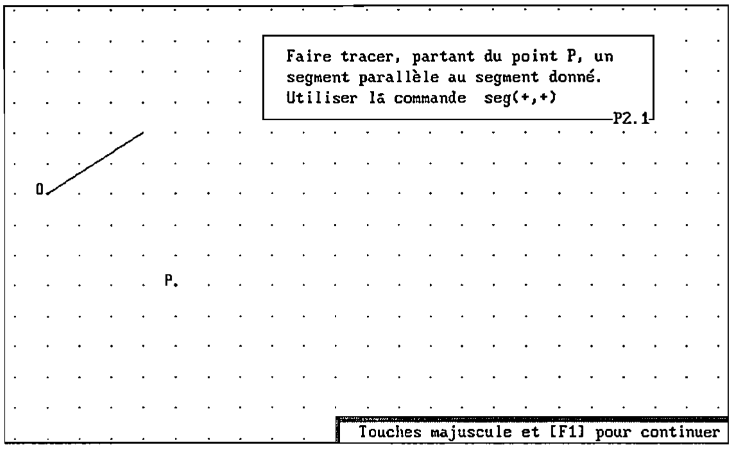


Figure a

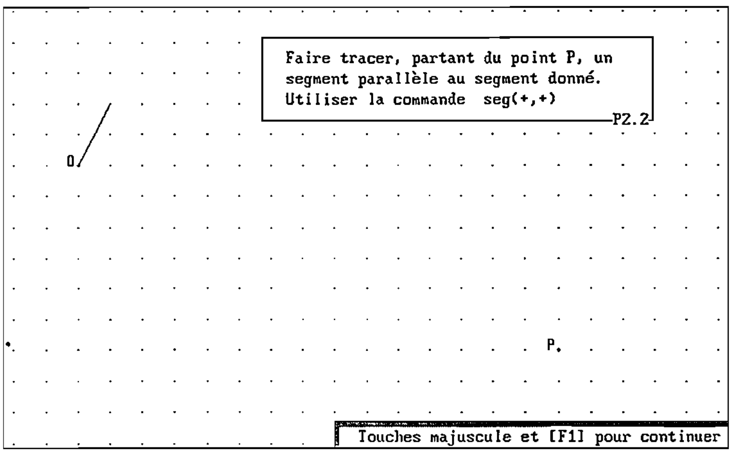


Figure B

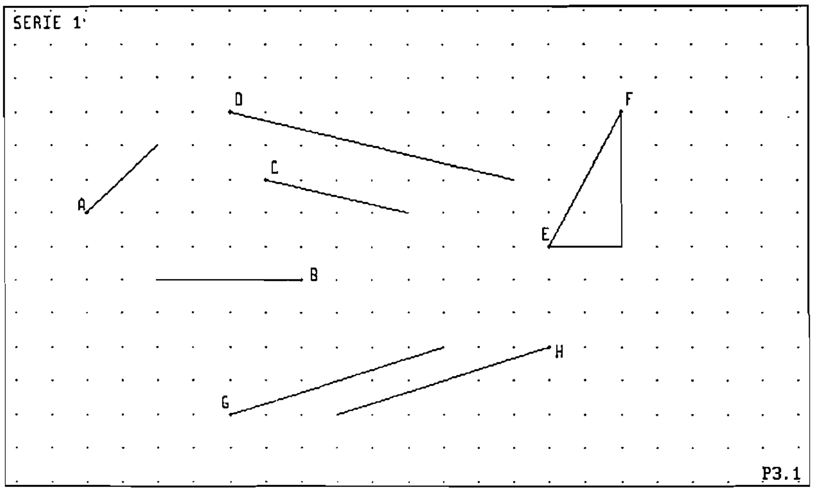
[12] Le système d'enseignement genevois ne prévoit pas l'utilisation du terme vecteur avant le niveau du lycée, d'où cette création de vocabulaire.

Procédures prévues : Si le segment est proche, chercher à maintenir constante la distance entre les segments. Si le segment est éloigné, la procédure précédente est coûteuse par rapport à celle qui consiste à compter le nombre d'unités horizontales et verticales séparant les extrémités du segment et à utiliser ces valeurs numériques [13].

Situation de formulation et institutionnalisation : Pour lui donner toute sa signification, le code devrait normalement être créé par les élèves eux-mêmes, puis institutionnalisé (cf la création d'un code fractionnaire dans Brousseau 81). Nous renversons les choses: le code est proposé par le maître à la suite des situations précédentes. Il est ensuite validé socialement, à travers l'activité suivante. Nous pensons que cela peut être suffisant pour donner un sens au code proposé, qui est d'ailleurs assez "naturel" à ce niveau scolaire.

Situation de communication et de validation : Faire reproduire une série de segments par un autre élève en utilisant le code institutionnalisé (sans ordinateur).

Variables didactiques : valeurs numériques, signe, cas particuliers (segments verticaux et horizontaux).



1.2. DROITE ET PENTE

Connaissance visée : le code de n'importe quel segment contenu dans une droite constitue l'information nécessaire et suffisante au tracé d'une droite parallèle à une droite donnée.

Situation d'action proposée : Tracer un segment parallèle à un segment donné, mais le plus long possible. Relever les codes de divers segments d'une droite et trouver une relation entre eux. Tracer une droite parallèle à une droite donnée.

Formulation : Se fait lors d'une séance de bilan collectif des acitvités précédentes.

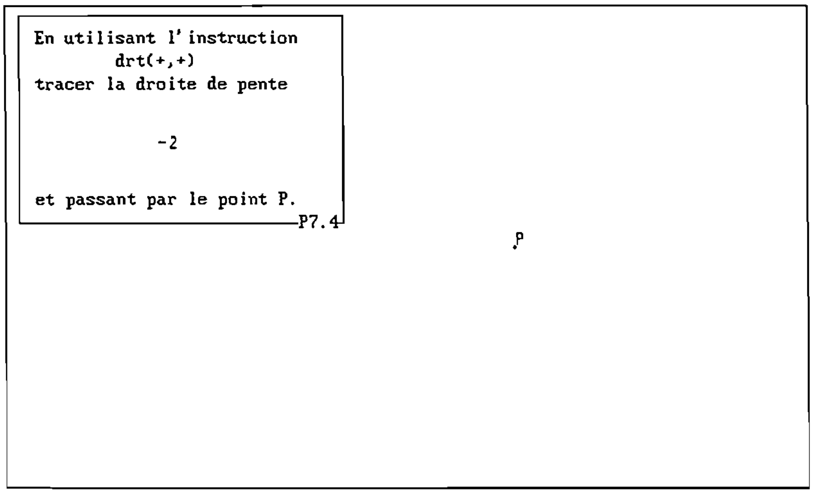
Institutionnalisation : Le maître institutionnalise ensuite les propriétés des segments parallèles et en conclut la possibilité de tracer une droite parallèle à partir de deux points quelconques de la droite. Définition de la pente d'une droite.

Situation de communication : Faire reproduire une série de droites par un autre élève, en ne donnant que les pentes.

Exercices : Relevé de pente avec correction plus exercice de tracé d'une droite de pente donnée (figure).

---

[13] Ces procédures ont été effectivement observées. Voir Bevacqua, Floris 89 et Schubauer 89.



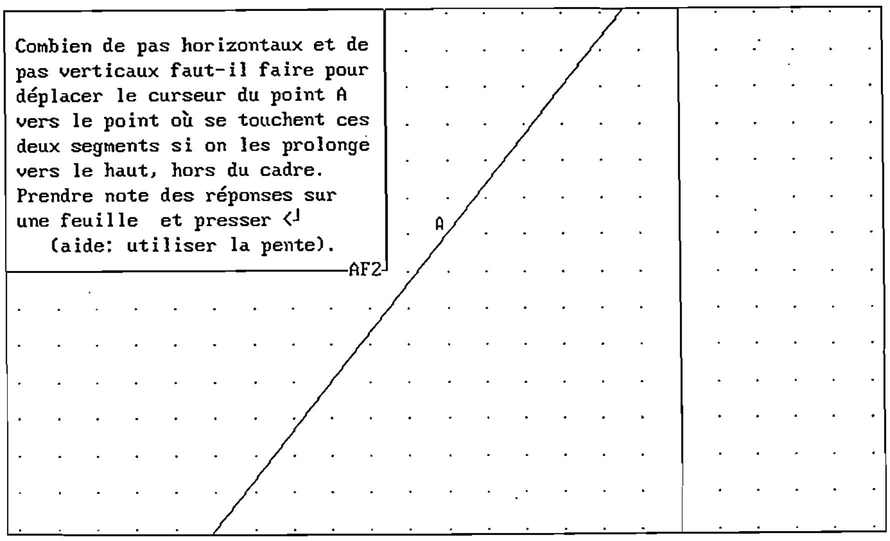
Certains exercices peuvent poser problème (à l'écran, lorsque la droite dont on doit relever la pente traverse l'écran dans un coin et oblige l'élève à déterminer la pente en utilisant un chemin différent).

Une ingéniérie théoriquement complète devrait prévoir ici un jeu permettant de donner aux élèves la connaissance suivante : la donnée d'un nombre rationnel détermine de façon unique une droite lorsque l'on connaît un point de la droite ; en outre, ce nombre croît avec la valeur de l'angle que fait la droite avec l'horizontale entre 0 et 90° de 0 à l'infini et entre 0 et -90° de 0 à l'infini. Cette activité permet aux élèves de comparer des droites entre elles. Pour un exemple, voir la situation sur la mesure de l'épaisseur d'une feuille de papier dans la séquence de Guy Brousseau sur l'apprentissage des nombres décimaux.

Au niveau où nous nous situons, ce genre d'activité est cependant lourd à gérer et nous n'avons pas trouvé une situation nous donnant satisfaction dans le contexte mis en place : les droites tracées sur ordinateur se superposent lorsque les pentes sont proches l'une de l'autre.

Séquence 2 : AFFINE

La séquence débute par deux activités de mise en place du milieu mathématique et didactique de la séquence principale SITP. Il s'agit d'un exercice de révision sur le repérage dans le plan cartésien, suivi par une version simplifiée de SITP (figure).



Ainsi, la compréhension des consignes de SITP devrait en être facilitée, et un certain type de résolution favorisé.

Ensuite, plusieurs versions de SITP sont proposées. Tout d'abord avec la droite d'équation $y = 2x + 3$, et, l'une après l'autre, les droites verticales d'équations $x = 3$, $x = 4$ et $x = 5$. Une fiche demande au élèves de formuler leurs calculs et de compléter une tableau de valeurs de x et de y, pour les valeurs entières de x allant de 0 à 5. La discussion de SITP ayant été faite dans le corps de l'article, nous n'y revenons pas.

Le même type d'activité se fait ensuite avec la droite $y = 2/3x + 4$, puis avec la droite $y = 7/4x$. A chacune de ces droites correspond une page de théorie et d'exercices selon le modèle donné à la page suivante.

Viennent ensuite divers exercices assez "classiques", tant à l'ordinateur que sur le papier (éventuellement figures). L'un des problèmes didactiques qui se posent à ce moment est de faire prendre conscience aux élèves des limites d'un traitement purement graphique de certains exercices. Là aussi, nous tentons de gérer ce problème à travers la manipulation de certaines variables didactiques (position des données, type numérique). Voir en fin d'annexe la façon dont nous proposons de le traiter (page TROUVER L'EQUATION).

EQUATION D'UNE DROITE : Théorie 1 (AF1 à AF4)

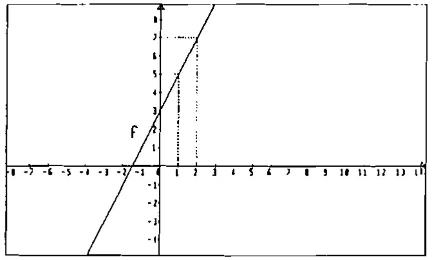
OBJECTIF

Définir et comprendre l'écriture $y = mx+n$ comme équation d'une droite affine dans le plan.

THEORIE

Droite f

Reprenons les trois droites de l'activité précédente. Pour la première droite, la droite f, vous avez remarqué que <u>pour chaque unité horizontale, la droite s'élève de deux unités verticalement</u>.



On peut écrire les relations suivantes, en partant du point où la droite f coupe l'axe vertical.

0 ———› 3
1 ———› 3+2 = 3 + 1·2
2 ———› 3+2+2 = 3 + 2·2
3 ———› 3 + 3·2
4 ———›......................
5 ———›...................... (compléter!)

La valeur de y se trouvera donc toujours de la façon suivante:

$$y = 3 + x \cdot 2$$

que l'on écrit plutôt, par convention,

$$\boxed{y = 2x + 3}$$

une égalité que l'on appelle <u>équation de la droite f</u>. On écrit aussi:

$$f: x \text{ ----> } 2x + 3$$

EQUATION D'UNE DROITE : Exercices 1 (AF1 à AF4)

1. Compléter le tableau suivant et retrouver l'équation de la droite (ou l'application) correspondante. Tracer ensuite le graphique de la droite:

x	0	1	2	3	4
y	2	5		11	

Equation: y =

2. Compléter le tableau suivant correspondant à la droite f dont l'équation est $y = 5x-2$. Tracer ensuite le graphique de la droite.

x	0	1	2	3	4	5
y				13		

3. Compléter le tableau suivant et retrouver l'équation de la droite (ou l'application) correspondante:

x	0	1	2	3	4	5
y	2,5			5,5	6,5	

Equation: y =

4. Compléter le tableau suivant correspondant à la droite f dont l'équation est $y = -x-2$. Tracer ensuite le graphique de la droite.

x	0	1	2	3	4	5
y					-6	

TROUVER L'EQUATION
(AF8)

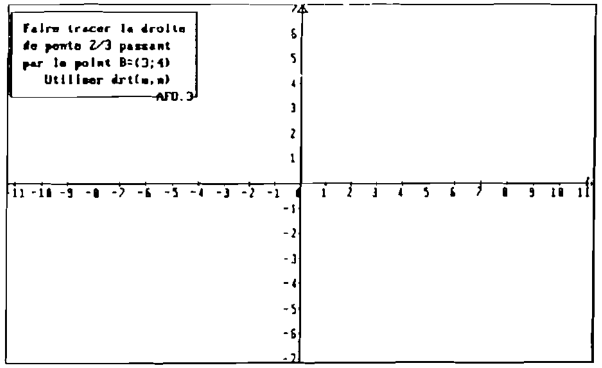
OBJECTIF

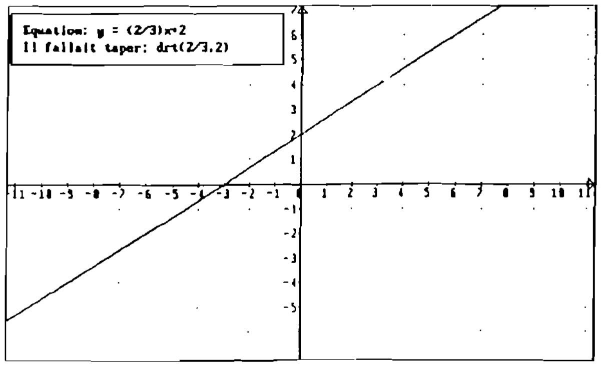
Entrainement à la recherche d'équations de droite, d'abord graphiquement, puis par calcul.

COMMENTAIRE

La commande drt(m,n) permet de faire tracer la droite d'équation y = mx+n. L'élève doit donc déterminer les valeurs de m et de n s'il désire résoudre les exercices dont les données sont les suivantes:

1. Apprentissage de la commande drt(m,n)
2. Droite de pente 1/3 passant par le point B = (3;0)
3. Droite de pente 2/3 passant par le point B = (3;4)
4. Droite de pente 7/4 passant par le point B = (12;18)
5. Droite de pente -2 passant par le point B = (9;-11)
6. Droite passant par les points A=(2,4) et B=(4,5)
7. Droite de pente -2 passant par le point B = (1;1)
8. Droite passant par les points A=(-4;1) et B=(2;-1)
9. Droite passant par les points A=(4;1) et B=(28;19)
10. Droite de pente -1/3 passant par le point B = (-6;13/4)





EXERCICES

Faire les exercices 314 à 319 du manuel CO. Consulter la correction dans CO89.

ANNEXE II - Deux élèves au travail : Carla et Bernardo.

Les élèves ont sous leurs yeux l'écran de la figure 1 (voir au début de l'article), correspondant à SITP. Ils doivent introduire les coordonnées du point P. L'exercice interactif continue en leur montrant une fenêtre graphique plus grande faisant voir le point P et traçant une croix au point correspondant aux coordonnées effectivement fournies. Il se pose parfois un petit problème d'interface, étant donné que le programme n'accepte que deux valeurs, séparées par une virgule et que seul le point décimal est reconnu.

Carla : (Regarde l'écran) Est-ce que tu comprends ?
Bernardo : (Scrute aussi l'écran) Où se trouve P ?
C : Je ne sais pas ! Il est là-haut. On ne peut pas le voir.
B : Ah Oui ! Nous devons savoir où se trouve l'intersection.
C : (Après quelques secondes) Un, deux, trois, quatre, cinq.
B : Attends ! (Il compte de un à huit).
C : Attends ! Je crois que je comprends ! Un sur trois, deux sur six.
B : Trois sur huit.
C : Es-tu sûr ?
B : Je vais essayer (il tape quelque chose au clavier)... C'est juste !
C : C'est faux !
B : C'est juste !
C : C'est faux !
B : C'est juste !
C : Je ne comprends pas.
B : (Montre l'écran de SITP, compte jusqu'à neuf et semble surpris ; recompte jusqu'à huit, et horizontalement jusqu'à trois). C'est juste !
C : Je ne comprends pas. Quel est ce point (montre l'origine des axes) ?
B : C'est zéro. Le point central !

Il semble que Carla a compris le problème comme "donner les composantes du segment partant de l'ordonnée à l'origine et aboutissant au point P." Bernardo a compris la question mais fait une erreur de comptage (8 au lieu de 9). Après quelques autres échanges analogues, les deux élèves décident de refaire l'exercice.

B : (déplaçant le curseur) un..un-deux, un..un-deux, un..un-deux.
C : (répète le comptage de Bernardo) C'est 3-6, n'est-ce pas ?
B : (compte en utilisant le curseur) 9 ! Mets 9 ! (Il regarde ensuite quelque chose dans ses notes).

Carla attend. Bernardo introduit la réponse au clavier, puis il constate que la croix marque l'origine en lieu et place du point P. Ils appellent le maître. Après avoir refait l'exercice encore une fois, il apparaît que Bernardo a tapé 3/9 au lieu des coordonnées 3;9. Après leur avoir fourni cette explication, le maître leur demande de refaire l'exercice :

C : Trois sur six.
B : Trois, neuf (en tapant ces valeurs). C'est juste !
C : Explique-moi !
B : Et bien...Tu comptes: un..un-deux, un..un-deux, un..un-deux.
C : Deux sur quatre, trois sur six !
B : Regarde ! un..un-deux, un..un-deux...
C : (Interrompant) Un..un-deux. Je ne vois pas où ça mène !

...et ça continue encore un moment.