UE Modélisation – Michèle Gandit – 29/01/2014 – Séance 1

A partir d'un document réalisé par Pierre Thibaut (SPC) et Michèle Gandit (maths) (2013)

Premières modélisations

A – Systèmes qui évoluent aléatoirement au cours du temps

On considère un système qui peut se trouver dans *p* états 1, 2, …, p, avec une certaine probabilité, variable au cours du temps, pour chaque état. On s'intéresse à l'évolution de ce système au cours du temps. On fait l'hypothèse que la probabilité de transition de l'état *i* à l'état *j* est indépendante du temps et ne dépend pas de l'histoire antérieure, mais seulement de l'état dans lequel on se trouve.

1) Donner un exemple de jeu de hasard qui correspond à un tel système.

2)On peut représenter un tel système par un graphe orienté, dont les sommets (des points) sont les états du système, et où l'on associe à chaque transition, de l'état *i* à l'état *j*, une arête orientée (une flèche) allant de *i* vers *j* à l'instant $t + 1$ sachant qu'on est dans l'état *j* à l'instant *t*. On remarquera qu'on peut rester dans un même état ; ainsi le graphe peut avoir des boucles (des flèches qui partent d'un point et reviennent au même point).

Un *graphe probabiliste* est un graphe orienté tel que, pour chaque couple de sommets (*i*, *j*), distincts ou confondus, il existe au plus une arête de *i* vers *j*, et où chaque arête est étiquetée par un nombre réel $p_{i,j}$, compris entre 0 et 1, la somme des poids des arêtes issues d'un même sommet étant égale à 1.

Par exemple, prenons pour système une diode qui indique une lecture d'un disque dur. On considère que, toutes les millisecondes, la diode peut changer d'état : elle est à l'état E (la diode est éteinte) ou bien elle est à l'état A (la diode est allumée). On a étudié que, quand elle est éteinte, la diode a une probabilité de 2/5 de s'allumer, et, quand elle est allumée, elle s'éteint une fois sur 5.

3) Représenter ce système (de la diode) par un graphe probabiliste.

4) Rédiger, en langage naturel, un algorithme de simulation de ce système (de la diode).

5) Quelle hypothèse ou conjecture faites-vous sur l'évolution de ce système au cours du temps ?

B – Modélisation par des automates cellulaires

Un automate cellulaire est une société de cellules élémentaires régie par des règles de transformation locale, qui évolue suivant le temps (considéré comme discret). A chaque instant, chaque cellule *C* prend un état, parmi un nombre fini d'états possibles, suivant cette règle locale, prenant en compte l'état des cellules d'un certain voisinage de *C*. Ces règles locales qui ne mettent en jeu qu'un nombre fini de cellules (voisines) ont un effet global : elles déterminent la dynamique de la société de cellules toute entière.

Les automates cellulaires permettent de modéliser des phénomènes variés tels que la circulation automobile, la propagation des feux de forêt, la croissance des cheveux, le comportement des gaz, la cristallisation des solides, la turbulence au sein des liquides, la percolation…

1) Automate cellulaire de Wolfram

Voici un extrait d'un article de La Recherche, n°360, page 35, de janvier 2003 :

« L'un des automates cellulaires les plus simples qui soient est celui que Wolfram appelle « la règle 110 ». Prenez du papier quadrillé. Noircissez une case, c'est-à-dire une cellule. Descendez d'un cran, noircissez la cellule en dessous et celle à sa gauche, puis, au cran suivant, les deux cellules en dessous et une à leur gauche. A partir de là, et toujours en descendant et en ajoutant une cellule à gauche à chaque cran, appliquez la règle suivante : une cellule est laissée blanche si les trois cellules situées juste au-dessus d'elle sont toutes noires, ou toutes blanches, ou noire-blanche-blanche. Noircissez les autres cellules. Echangez maintenant votre papier quadrillé contre un ordinateur pour avoir la place d'appliquer la règle un très grand nombre de fois. Vous verrez qu'au bout de quelques centaines d'itérations la règle se met à produire une structure étonnante, ni régulière, ni complètement chaotique.

Cette règle très simple est présentée par Wolfram comme un exemple paradigmatique montrant qu'une règle très simple peut produire une structure complexe, imprévisible autrement qu'en utilisant cet automate. Il montre que la règle 110 appartient à une classe particulière d'automates cellulaires, qui, outre cette particularité, sont capables de s'émuler l'un l'autre, c'est-à-dire, bien qu'elles soient différentes, de produire toutes les mêmes étonnantes structures. L'un de ses élèves, Matthew Cook, a démontré que cette classe d'automates comprend celle des machines de Turing, qui sont dites universelles. Autrement dit, que les règles de cette classe sont des calculateurs universels. »

➔Faire un dessin représentant 10 itérations de la règle donnée dans cet extrait. On pourra utiliser le quadrillage joint.

2) Modéliser un embouteillage par un automate cellulaire

Dans la suite, on construit un modèle à partir d'un automate cellulaire caractérisé par un nombre fini de *cellules* x_j disposées sur une grille-ligne où j représente la position sur la grille-ligne, tel que :

- chaque cellule x_j prend la valeur 0 ou 1 ;

- la valeur à l'instant $t + 1$ de la cellule x_j est fonction seulement de l'état au temps t de son état et de celui de ses cellules adjacentes, suivant quelques règles locales bien définies ;
- aucune entrée n'a lieu dans le système ;
- à chaque nouvelle unité de temps, les mêmes règles locales sont appliquées pour toutes les cellules de la grille-ligne, produisant une nouvelle *génération* de cellules dépendant entièrement de la génération précédente.

1) Vous êtes le conducteur d'une voiture dans une file prise dans un embouteillage. La voiture qui vous précède a avancé d'une longueur, vous avancez pour occuper sa place. Vous n'auriez évidemment pas pu bouger, si la voiture précédente était restée immobile. Lors d'un embouteillage, la lente progression du train de voitures résulte de la répétition de quelques comportements machinaux de milliers d'automobilistes.

Pour modéliser la propagation d'un bouchon, on propose d'utiliser un automate cellulaire à une dimension, comme décrit ci-dessus, qui corresponde aux états de la file de voitures suivant le temps. On représente donc la file de voitures par une ligne de n cellules…

➔Poursuivre la description du modèle. On définira en particulier les règles locales de transformation de chaque cellule.

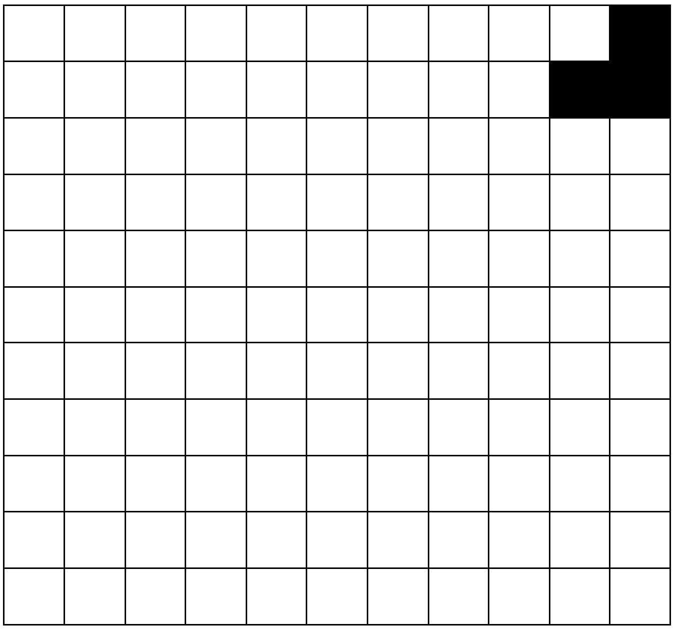
2) On considère un voisinage de 3 cellules données. Expliciter toutes les possibilités d'état pour ces 3 cellules et, pour chacun de ceux-ci, à un instant t, donner l'état de la cellule centrale à l'instant $t + 1$.

3) On considère l'état de la route (sur une file) sur une longueur fixée, à l'instant 0, représentée par la première ligne du tableau donné en Annexe 3. Chaque ligne du tableau représente l'état de la route aux instants 0 puis 1 puis 2.

➔Compléter les deuxième et troisième lignes du tableau suivant les règles locales du modèle ci-dessus.

Chaque état de la route ainsi modélisé est calculé facilement par un ordinateur qui applique les règles locales à chaque cellule, sur un temps donné. Ceci permet de faire apparaître des résultats sur la propagation des bouchons.

Annexe 1 - Quadrillage de la règle 110 de Wolfram



Annexe 2 - Modélisation d’un bouchon